

SÉRIE A, N^o 1236

N^o D'ORDRE :

2105

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

M. R. DARBORD

Agrégé de l'Université

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES D'ÉLECTROSTATIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le *28* Mars 1930 devant la Commission d'examen

MM. JEAN PERRIN.....	<i>Président</i>
COTTON	} <i>Examineurs.</i>
LANGEVIN	

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1930



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551824_0033

SÉRIE A, N^o 1236

N^o D'ORDRE :

2105

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

M. R. DARBORD

Agrégé de l'Université

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES D'ÉLECTROSTATIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le **Mars 1930** devant la Commission d'examen

MM. JEAN PERRIN.....	} <i>Président</i>	
COTTON		} <i>Examineurs.</i>
LANGEVIN		

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1930

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen..... G. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.

Doyens honoraires.. P. APPELL, M. MOLLIARD.

Profess. honoraires.. { A. JOANNIS. A. FERNBACH.
H. LE CHATELIER. A. LEDUC.
H. LEBESGUE. E. HEROUARD.

<i>Professeurs</i>	ÉMILE PICARD..... Analyse supér. et algèbre supérieure. G. KOENIGS..... Mécanique physique et expérimentale. E. GOURSAT..... Calcul différentiel et calcul intégral. P. JANET..... Electrotechnique générale. F. WALLERANT... Minéralogie. P. PAINLEVÉ..... Mécanique anal. et mécanique céleste. GABRIEL BERTRAND Chimie biologique. M^{me} P. CURIE..... Physique générale et radioactivité. M. CAULLERY..... Zoologie (Evolution des êtres organisés) G. URBAIN..... Chimie générale. ÉMILE BOREL..... Calcul des probabilités et phys. mathém. L. MARCHIS..... Aviation. JEAN PERRIN..... Chimie physique. RÉMY PERRIER..... Zoologie (Enseignement P. C. N.). H. ABRAHAM..... Physique. M. MOLLIARD..... Physiologie végétale. E. CARTAN..... Géométrie supérieure. L. LAPICQUE..... Physiologie générale. E. VESSIOT..... Théorie des fonct. et th. des transf. A. COTTON..... Physique générale. J. DRACH..... Application de l'analyse à la géométrie. CHARLES FABRY... Physique. CHARLES PÉREZ... Zoologie. LÉON BERTRAND... Géolog. structurale et géolog. appliquée. R. LESPIEAU..... Théories chimiques. E. RABAUD..... Biologie expérimentale. P. PORTIER..... Physiologie comparée. E. BLAISE..... Chimie organique. P.-A. DANGEARD.. Botanique. P. MONTEL..... Mécanique rationnelle. P. WINTREBERT.. Anatomie et histologie comparées. O. DUBOSQ..... Biologie maritime. G. JULIA..... Mathématiques générales. A. MAILHE..... Etude des combustibles. L. LUTAUD..... Géogr. physique et géol. dynamique. EUGÈNE BLOCH... Physique théorique et phys. céleste. HENRI VILLAT... Mécanique des fluides et applications. CH. JACOB..... Géologie. P. PASCAL..... Chimie minérale. LÉON BRILLOUIN.. Théories physiques. V. AUGER..... Chimie appliquée.
---------------------------------	--



E. PÉCHARD.... Chimie (Ens. P. C. N.). M. GUICHARD.... Chimie minérale. A. GUILLET..... Physique. G. MAUGUIN.... Minéralogie. L. BLARINGHEM Botanique. A. MICHEL-LÉVY Pétrographie. A. DEREIMS.... Géologie. A. DENJOY..... Calcul diff. et int. H. BENARD.... Physique (P.C.N.). E. DARMOIS.... Physique. G. BRUHAT.... Physique. H. MOUTON.... Chimie physique.	L. JOLEAUD..... Paléontologie. M. JAVILLIER.... Chimie biologique. A. DUFOUR..... Physique (P.C.N.). F. PICARD..... Zoologie (Evolution des êtres organisés). ROBERT-LÉVY.... Zoologie. L. DUNOYER.... Optique appliquée. A. GUILLIERMOND Botanique (P.C.N.). A. DEBIERNE.... Radioactivité. M. FRECHET.... Calcul des probabilités et phys. mathém.
--	---

Secrétaire..... A. PACAUD

A Monsieur PAUL LANGEVIN

Professeur au Collège de France

*En témoignage de reconnaissance
et de respectueuse affection.*

A MA FEMME

A MES PARENTS

RECHERCHES D'ÉLECTROSTATIQUE

Par M. R. DARBORD

INTRODUCTION

L'origine de ce travail est l'invention d'un condensateur, permettant d'étendre à la mesure en haute fréquence des constantes diélectriques des liquides le bénéfice de l'anneau de garde ⁽¹⁾. Cet appareil se présente comme un coefficient d'influence à deux positions et il est utile de déterminer exactement les deux valeurs de ce coefficient.

J'ai imaginé une méthode simple de mesure absolue qui permet d'étalonner un coefficient d'influence au millième près ⁽²⁾. J'ai développé cette méthode et je l'ai appliquée à l'étude du condensateur précédent.

La méthode est basée sur l'emploi d'un coefficient d'influence variable à armatures parallèles. Pour expliquer les résultats obtenus, j'ai dû établir la théorie du *coin électrostatique*. Quand les lignes de force reliant deux conducteurs sont presque rectilignes, une bonne méthode d'approximation consiste à assimiler les lignes de force à des arcs de cercle aboutissant normalement aux surfaces conductrices. Dans le cas du coin électrostatique, j'ai démontré finalement que les lignes de force sont rigoureusement circulaires.

Une autre application de la méthode d'approximation a

⁽¹⁾ *Comptes Rendus* du 28 novembre 1927.

⁽²⁾ *Comptes Rendus* du 7 mai 1928.

donné naissance à la seconde partie de ce travail. J'ai fait appel à cette méthode pour calculer, dans le cas de deux sphères qui s'influencent, la plus grande intensité du champ. Ce calcul présente un certain intérêt quand on se propose d'étudier les conditions de la décharge électrique à travers un gaz tel que l'air ⁽¹⁾. Les résultats ayant été encourageants, j'ai repris le calcul du champ maximum en suivant la méthode rigoureuse de Lord Kelvin.

La seconde partie de ce travail comprend : d'une part, l'exposé de la méthode de Kelvin et différents développements auxquels m'a conduit l'étude de cette méthode ; d'autre part, le calcul du champ maximum et son application aux expériences d'Abraham et Villard sur la décharge électrique entre sphères.

(¹) *Comptes Rendus* du 24 juin 1929.

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE I

Condensateur pour la mesure absolue, en haute fréquence, des constantes diélectriques des liquides.

Exposé de la nouvelle méthode de mesure. — Quand on détermine une constante diélectrique par une méthode statique, on mesure une capacité définie avec précision par un anneau de garde. Au contraire, quand on fait les mesures en haute fréquence au pont de Nernst, l'emploi d'un anneau de garde semble malaisé, on ne voit pas à quoi on pourrait le relier électriquement et, dans ces conditions, la dispersion des lignes de force entrave l'interprétation rigoureuse des mesures ⁽¹⁾.

La méthode suivante permet de lever la difficulté. Cette méthode demande l'emploi d'un condensateur spécial, que représente schématiquement la figure 1. Par rotation, on peut donner à l'armature A deux positions extrêmes relativement à l'armature B. Ces deux positions, à 180° l'une de l'autre, sont définies par deux butées. La coupe PQ repré-

(¹) J. ERRERA, *Polarisation diélectrique*, Conférences-Rapports de Physique, p. 80.

sente en traits pleins la position I, en traits pointillés la position II ; il est évident que la capacité croît quand on passe de I à II.

Au niveau du plan MN, les deux armatures forment un petit condensateur cylindrique. Les lignes de force sont

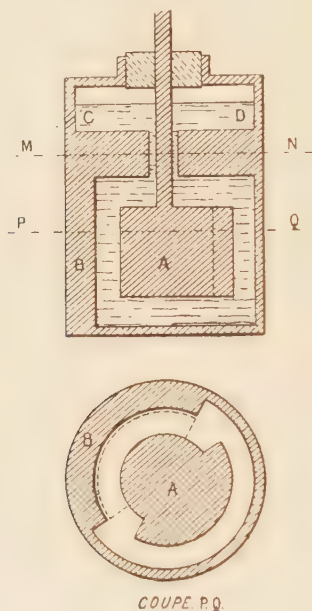


Fig. 1.

radiales et elles ne changent pas, quand on fait tourner l'armature A. Ainsi, le plan MN sépare le condensateur en deux parties sans influence électrostatique l'une sur l'autre :

1° Au-dessus du plan MN, la distribution des lignes de force varie quand on introduit le liquide, mais la capacité correspondante reste la même quand on passe de la position I à la position II.

2° Au-dessous du plan MN, tout se passe comme s'il y avait influence totale entre les deux surfaces en regard.

Quand on remplit le condensateur, les lignes de force gardent la même forme et, par conséquent, la capacité correspondant à la partie inférieure du condensateur est simplement multipliée par la constante diélectrique K du liquide.

Appelons, dans le cas de l'air, C la capacité de la partie supérieure, C_1 et C_2 les capacités de la partie inférieure pour les deux positions I et II. Dans le cas du liquide, ces mêmes capacités deviennent C' , KC_1 et KC_2 .

Étalonnage du condensateur. — Le condensateur est vide. Sa capacité totale est $(C + C_1)$ pour la position I, $(C + C_2)$ pour la position II. La mesure au pont donne :

$$(C + C_2) - (C + C_1) = (C_2 - C_1)$$

Mesure de la constante diélectrique. — Le condensateur est rempli de liquide. Sa capacité est $(C' + KC_1)$ pour la position I, $(C' + KC_2)$ pour la position II. La mesure au pont de Nernst donne :

$$(C' + KC_2) - (C' + KC_1) = (KC_2 - KC_1)$$

La constante diélectrique est :

$$K = \frac{KC_2 - KC_1}{C_2 - C_1}$$

Par cette méthode, la capacité mesurée est nettement définie et la dispersion des lignes de force n'intervient plus. Comme autres avantages :

1° On n'a plus besoin de s'adresser à un corps étalon de constante diélectrique connue ; on réalise la mesure absolue des constantes diélectriques ;

2° Le condensateur peut être rempli d'une façon quelconque, pourvu qu'il le soit suffisamment ;

3° La vapeur du liquide peut sans inconvénient avoir une constante diélectrique s'écartant de l'unité.

1^{er} lemme. — Nous avons dit que le plan MN séparait le condensateur en deux parties sans influence électrostatique l'une sur l'autre. Ceci peut se démontrer rigoureusement. Nous établirons d'abord le lemme suivant :

Si le potentiel est déterminé en chaque point d'une surface fermée renfermant un milieu diélectrique quelconque mais invariable, le potentiel est déterminé en chaque point de ce milieu.

Autrement dit, supposons que certaines modifications apportées à l'extérieur d'une surface fermée Σ limitant un milieu diélectrique invariable ne modifient pas le potentiel en chaque point de la surface. C'est là une hypothèse qui ne se trouvera réalisée que dans certains cas particuliers. Alors, à l'intérieur de Σ , la fonction potentiel $V(x, y, z)$ restera la même; les lignes de force garderont la même forme.

Supposons en effet que la fonction potentiel varie et devienne $V'(x, y, z)$. Sur la surface, la distribution des potentiels $v(\alpha, \beta)$ est restée la même. Changeons le signe des potentiels et des charges de tous les conducteurs. Le potentiel devient $-v(\alpha, \beta)$ sur la surface Σ et $-V'(x, y, z)$ à l'intérieur..

Superposons le champ électrostatique initial, où le potentiel est $v(\alpha, \beta)$ sur la surface Σ et $V(x, y, z)$ à l'intérieur, au champ électrostatique final, où le potentiel est $-v(\alpha, \beta)$ sur Σ et $-V'(x, y, z)$ à l'intérieur de Σ .

Auparavant, comme les conducteurs et les diélectriques ont pu être déplacés ou modifiés, nous fixerons les charges libres et les charges de polarisation qui se trouvent à l'extérieur de Σ .

La superposition des deux champs donnera un champ

électrostatique, ne correspondant d'ailleurs à aucune réalité expérimentale, où, extérieurement à Σ , des charges sont fixées sur des surfaces géométriques placées dans le vide. Il est permis de considérer un tel champ et de calculer la distribution des potentiels.

A l'intérieur de Σ , le potentiel est :

$$V(x, y, z) = V'(x, y, z)$$

Sur la surface Σ elle-même, le potentiel est :

$$v(\alpha, \beta) - v(\alpha, \beta) = 0$$

On peut donc, sans rien changer, métalliser la surface et la relier au sol. Ainsi, nous avons affaire à des diélectriques protégés par une enceinte métallique reliée au sol. Ces diélectriques ne se polarisent pas, l'intérieur de Σ n'est pas électrisé ; le potentiel est nul à l'intérieur comme à la surface. Par conséquent :

$$V'(x, y, z) = V(x, y, z)$$

et cette relation démontre le lemme.

2^e lemme. — *Quand on remplit par un diélectrique homogène une région du champ électrostatique primitivement vide et limitée par un tube de force et deux surfaces conductrices de potentiels déterminés, le champ électrostatique n'est pas modifié. Le champ électrique reste le même en chaque point et, dans la région considérée, l'induction est simplement multipliée par la constante du diélectrique.*

Supposons en effet que le champ électrostatique ne varie pas. Dans cette hypothèse, le tube de force reste un tube de force. Il n'apparaît pas de charges de polarisation à la surface du tube ; il en apparaît seulement à ses deux extrémités.

Considérons un point quelconque M de l'une des deux extrémités. En ce point, le champ à la surface était h ; nous supposons qu'il reste égal à h . En ce point M, la densité de la couche électrique portée par la surface conductrice était :

$$\sigma_0 = \frac{h}{4\pi}$$

Elle devient :

$$\sigma = \frac{Kh}{4\pi}$$

et la surface diélectrique porte, toujours au même point, la densité :

$$\sigma' = -Kh$$

Le champ est compté positivement vers l'extérieur ; κ est la susceptibilité du diélectrique et $K = 1 + 4\pi\kappa$ la constante diélectrique. La densité apparente au point M est :

$$\sigma \because \sigma' = \frac{K - 4\pi\kappa}{4\pi} h = \frac{h}{4\pi} = \sigma_0$$

L'ensemble des nouvelles charges libres et des charges de polarisation est donc équivalent aux anciennes charges libres.

Si, dans un problème d'électrostatique, on se donne la distribution du champ et qu'il en résulte une distribution des charges libres et des charges de polarisation produisant justement le champ donné, on a trouvé la distribution d'équilibre. En effet, d'une part on se donne un champ normal aux surfaces conductrices (sinon, on ne pourrait trouver une distribution pour les charges libres) et d'autre part la solution d'un problème d'équilibre électrostatique est unique.

Cette remarque générale, appliquée au cas présent, montre que le champ électrostatique n'est pas modifié par l'introduction du diélectrique.

Applications. — 1° Si les deux surfaces d'un condensateur plan sont séparées par des cales diélectriques dont les faces latérales sont perpendiculaires aux faces qui touchent les armatures, les cales ne déforment pas le champ si elles ne sont pas trop près des bords du condensateur.

2° Nous allons appliquer ce lemme à l'étude du condensateur à deux positions qui fait l'objet de ce chapitre.

3° On peut baser sur ce lemme le principe d'un second condensateur pour la mesure en haute fréquence des constantes diélectriques des liquides. Soit en effet un condensateur cylindrique à armatures verticales (fig. 2). Supposons déterminés les potentiels des armatures A et B. Loin des extrémités du condensateur, les lignes de force sont sensiblement radiales. Remplissons le condensateur partiellement de liquide, jusqu'au niveau CD. La surface qui sépare maintenant le liquide et l'air était une *surface de force* ; autrement dit, en tout point de cette surface, le champ était tangent à la surface. Par application du lemme, le champ électrostatique ne change pas, quand on introduit le liquide ; la surface de séparation reste une surface de force.

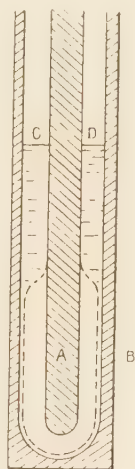


Fig. 2.

Appelons C_1 , C_2 , C_3 les capacités du condensateur, quand il est vide, quand il est rempli avec un liquide étalon (constante diélectrique K), quand il est rempli d'un même volume du liquide à étudier (constante diélectrique K'). Comme la surface libre du liquide est une surface de force, le plan AB sépare le condensateur en deux condensateurs

en parallèle et on établit facilement la formule suivante :

$$\frac{K' - 1}{K - 1} = \frac{C_3 - C_1}{C_2 - C_1}$$

ϵ est la constante diélectrique du vide dans le système électrostatique.

Ce condensateur, comme le condensateur à deux positions, évite la dispersion des lignes de force, mais il ne présente pas les mêmes avantages. Il peut cependant être utile si on ne dispose que de faibles quantités de liquides. Au voisinage de la surface du liquide, les deux armatures ne peuvent pas être trop rapprochées, à cause de la capillarité, mais on peut accroître la capacité en donnant à l'armature interne la forme indiquée en pointillé.

Application des lemmes. — Appliquons les deux lemmes à l'étude du condensateur à deux positions. Il s'agit de démontrer rigoureusement les propriétés de l'appareil, sur lesquelles nous nous sommes appuyés pour donner les expressions de la capacité du condensateur vide ou rempli, dans la position I ou II.

Quand on veut calculer une capacité, on se fixe les potentiels des conducteurs et on en calcule les charges (ou inversement). Ici, nous supposerons déterminés les potentiels des deux armatures.

Nous diviserons le milieu diélectrique, qui s'étend à l'infini, en deux volumes, par la portion du plan MN comprise entre les armatures A et B ; appelons V le volume tout entier à l'intérieur du condensateur et V' l'autre volume. Les surfaces S et S' qui limitent les volumes V et V' se composent d'éléments de trois sortes :

- 1° Les armatures A et B, dont on se donne les potentiels.
- 2° Une surface fermée, à l'infini, entourant le condensateur ; à l'infini, le potentiel est nul.
- 3° La portion du plan MN comprise entre les armatures

A et B ; au voisinage de MN, où les armatures forment un petit condensateur cylindrique, les lignes de force et les potentiels sont bien définis.

On voit que le potentiel est bien déterminé en chaque point des surfaces S et S' qui limitent les volumes V et V'. Le premier lemme appliqué à la surface S et à la surface S' montre alors que la distribution des potentiels ne change pas en V quand on modifie uniquement V' et réciproquement : les champs V et V' sont donc sans influence électrostatique l'un sur l'autre. *Les lignes de force ne changent pas en V' quand on passe de la position I à la position II.*

Fixons le condensateur dans l'une ou l'autre de ces deux positions et remplissons-le. Remplissons-le d'abord jusqu'au niveau MN. Comme le volume V est limité par une surface de force et par des surfaces métalliques de potentiels déterminés, le deuxième lemme montre que le champ électrostatique n'est pas modifié.

Complétons maintenant le remplissage, jusqu'au niveau CD. On modifie uniquement le volume V' ; le premier lemme montre que le champ électrostatique n'est pas changé en V. *Le remplissage ne change pas la forme des lignes de force dans le volume V.* Simplement, les charges appelées sur les surfaces conductrices deviennent K fois plus grandes.

Description du condensateur. — Pour des raisons pratiques, le condensateur n'a pas été réalisé exactement suivant le schéma qui nous a servi pour expliquer la méthode. L'appareil a été construit par M. Gondet, de la maison Beaudoin, suivant la coupe représentée par la figure 3.

Les principales conditions à remplir sont les suivantes :

1° Les deux positions I et II du condensateur doivent être définies avec précision.

2° L'appareil doit être complètement et facilement dé-

montable afin qu'on puisse le nettoyer quand on veut changer le liquide.

En prévision de mesures électrostatiques, le condensateur comprend, en plus des armatures principales, une armature

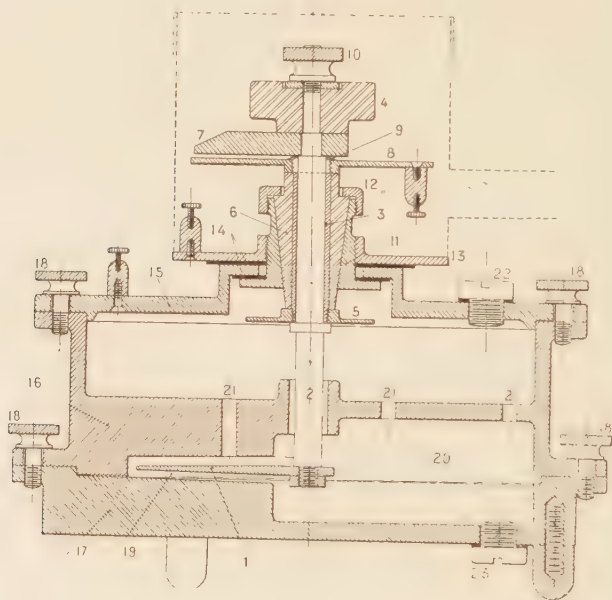


Fig. 3.

supplémentaire, destinée à être reliée au sol. Dans le cas des mesures électrostatiques, le rôle de cette armature est double :

1° L'armature interne est isolée à l'ambre par rapport à l'armature au sol, séparée elle-même de l'armature externe par des feuilles de mica. Si l'ambre supportait directement la différence de potentiel entre les armatures principales, les fuites seraient considérables.

2° La présence d'une armature au sol permet d'adapter

facilement à l'appareil une protection électrostatique ⁽¹⁾ pour les connexions aboutissant à l'armature isolée à l'ambre.

Dans le cas des mesures en haute fréquence, on réunit l'armature supplémentaire à l'armature externe.

L'armature interne comprend le secteur horizontal 1 et l'axe 2 que l'on fait tourner dans le manchon 3 à l'aide du bouton d'ébonite 4. Sur le manchon est fixée une plaque circulaire 5 qui protège le bouchon d'ambre 6 contre les éclaboussures de liquide. L'index 7 comporte un évidement carré correspondant à une partie carrée de l'axe 2 ; on le remonte toujours de la même façon par rapport au secteur 1, fixé définitivement sur l'axe. Les positions du secteur, à 180° l'une de l'autre, sont déterminées par deux butées fixées sur la plaque 8. La rondelle élastique 9 empêche le système mobile d'être coincé par les pièces solidaires du manchon, quand on serre l'écrou d'assemblage 10.

L'armature supplémentaire comprend le cône femelle 11 dans lequel s'engage le bouchon d'ambre 6, l'écrou de serrage 12 de ce bouchon et l'écrou 13 qui fixe l'armature intermédiaire sur l'armature externe. Ces deux armatures sont séparées par les plaques de mica 14.

L'armature externe se compose de trois pièces 15, 16 et 17 que l'on démonte en enlevant la vis 18. La pièce 16 forme avec l'axe 2 un petit condensateur cylindrique. Le coefficient d'influence entre les armatures interne et externe devient évidemment plus petit quand, par la rotation de l'axe 2, on fait passer le secteur 1 de l'évidement 19 à l'évidement 20. Les surfaces de l'évidement 20 sont inclinées et des cheminées 21 sont ménagées dans la pièce 16, pour faciliter l'évacuation des bulles d'air quand on introduit le liquide. Les bouchons de remplissage et de vidange sont en 22 et en 23.

(1) Représentée en pointillée sur la figure 3.

CHAPITRE II

Détermination des coefficients d'influence du condensateur.

Théorie d'une méthode absolue nouvelle.

Le condensateur décrit au chapitre précédent est un condensateur variable dont les deux positions extrêmes (que nous appellerons position *maximum* et position *minimum*) sont définies avec précision. La différence des valeurs correspondantes du coefficient d'influence entre les armatures interne et externe est donc bien définie ; il est utile de déterminer exactement cette différence car alors le condensateur pourra servir de coefficient d'influence étalon. En particulier, on pourra se rapporter à lui pour l'étalonnage des condensateurs variables du pont de Nernst.

J'ai imaginé une méthode simple de mesure *absolue* qui permet d'étalonner facilement un coefficient d'influence au millième près. Cette méthode repose sur l'emploi d'un coefficient d'influence variable que nous allons décrire. Nous développerons ensuite la méthode et nous l'appliquerons à la mesure du coefficient d'influence des armatures interne et externe du condensateur à deux positions.

Pour que les deux valeurs extrêmes de ce coefficient soient bien définies, nous entourerons la partie supérieure de l'armature interne par une enceinte protectrice en forme de cloche, représentée en pointillé sur la figure 3 et en communication avec l'armature intermédiaire, elle-même reliée au sol. La partie supérieure de la cloche est constituée

par un couvercle qui s'enlève quand on veut passer de la position maximum à la position minimum, ou inversement. Le tube latéral sert au passage du fil, protégé électrostatiquement, qui doit réunir l'armature interne à un électromètre.

Grâce à cette protection électrostatique, aucune ligne de force, à l'extérieur du condensateur, ne pourra joindre les armatures interne et externe et aucune perturbation ne pourra fausser la valeur de la différence que nous voulons déterminer.

Description d'un coefficient d'influence variable. — Cet appareil est représenté par la figure 4, qui est une coupe passant par l'axe.

Le plateau I, qu'on relie à l'électromètre, est isolé par un bouchon d'ambre A. Ce plateau est entouré d'un anneau de garde G qui fait partie de la protection électrostatique, reliée au sol. La largeur du sillon, entre le plateau isolé et l'anneau de garde est environ $1/4$ de millimètre. En principe, ce sillon doit être aussi étroit que possible mais, d'un autre côté, s'il est trop étroit, on introduit une capacité parasite importante.

Le plateau de charge C est isolé par un bouchon d'ébonite E. Les diamètres du plateau isolé I et du plateau de charge sont respectivement 7 cm. et 13 cm., ce qui fait un anneau de garde de 3 cm. de large. Le plateau de charge est porté par la vis micrométrique V. Le plan du plateau de charge est rigoureusement perpendiculaire à l'axe de la vis et toutes les positions du plateau sont donc exactement parallèles. On peut faire varier la distance des plateaux de 0 à 30 mm.

La vis micrométrique est munie d'un tambour T qui porte 100 divisions. Chaque tour du tambour produit un déplacement parallèle du plateau de charge égal à 1 mm. : chaque division correspond donc à 10 microns. Le diamètre

du tambour est assez grand (5 cm.) pour qu'on puisse lire le dixième de division ; autrement dit, on peut lire la *cote* du plateau de charge à un micron près. C'est avec cette précision que nous avons fait les mesures et, dans ces conditions, la régularité des résultats montre que la vis micromé-

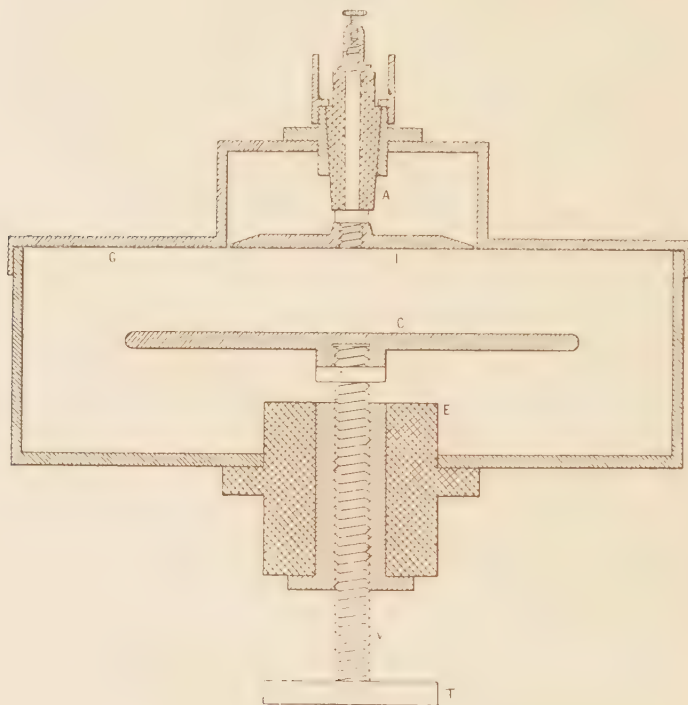


Fig. 4.

trique est excellente. Cette vis a été fournie par la maison Beaudoin, qui a d'ailleurs construit tout l'appareil.

Par construction, les armatures sont parfaitement planes et le plateau isolé est dans le plan de l'anneau de garde. Par contre, le parallélisme des plateaux est réalisé assez indirectement, partant avec une certaine imprécision. La particularité de la méthode que nous allons développer est juste-

ment de permettre la détermination absolue précise d'un coefficient d'influence, grâce à un appareil qui n'est pour tant pas défini géométriquement d'une façon parfaite.

Disons tout de suite que la méthode consiste à comparer le coefficient d'influence à mesurer au coefficient variable, pour une série de positions de ce dernier. Après avoir rappelé le principe de la balance de capacité ⁽¹⁾, qui permet la comparaison, nous verrons comment utiliser les mesures pour étalonner, à la fois, le coefficient fixe et le coefficient variable.

Balance de capacité. — On détermine le rapport des deux coefficients d'influence en utilisant une sorte de montage en pont de Wheatstone où les deux coefficients C_1 et C_2 et deux résistances R_1 et R_2 sont placées sur les branches du pont, comme l'indique la figure 5. La diagonale AB porte la batterie E et l'interrupteur I. L'électromètre est placé sur l'autre diagonale CD. Les coefficients d'influence ont leurs armatures isolées à l'ambre reliées au point A. Quand on isole l'électromètre, en ouvrant le contact i , on isole ensemble les quadrants Q et les armatures montées sur ambre.

Les résistances sont montées en potentiomètre ; quand on ferme l'interrupteur I, les plateaux de charge, reliés à A et B, sont portés à des potentiels opposés V_1 et $-V_2$ tels que :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Au contraire, quand l'interrupteur I est ouvert, les plateaux de charge sont au potentiel du point D, relié au sol, c'est-à-dire au potentiel zéro.

(1) MASCART, *Electricité et Magnétisme*, 2^e édition, p. 500.

Isolons l'électromètre, puis fermons I. Les charges appelées sur les deux armatures isolées *varient* de :

$$-C_1V_1 \quad \text{et} \quad +C_2V_2$$

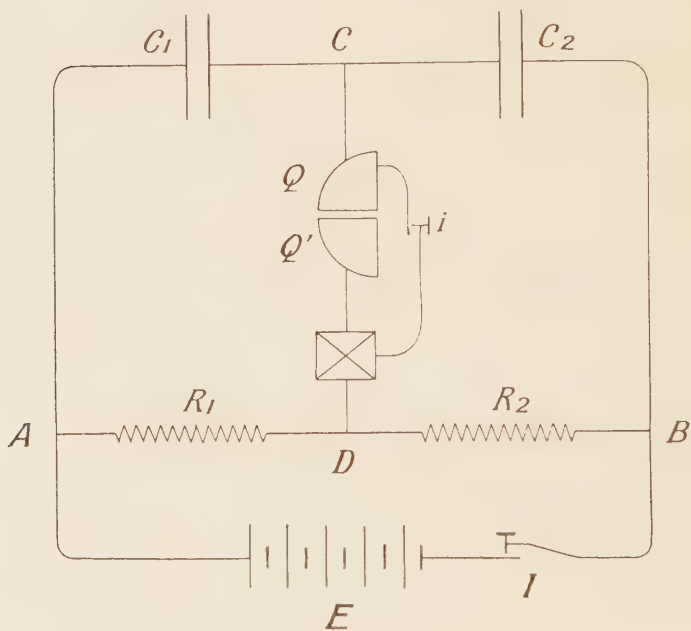


Fig. 5.

puisque C_1 et C_2 sont les valeurs *absolues* des coefficients d'influence. La charge des quadrants Q *varie* donc de :

$$C_1V_1 - C_2V_2$$

Si $C_1V_1 = C_2V_2$, c'est-à-dire $C_1R_1 = C_2R_2$ le spot de l'électromètre reste immobile quand on manœuvre l'interrupteur I.

Le raisonnement ne fait intervenir que des *variations* de potentiel. Le résultat est donc indépendant des f. e. m. de contact qui peuvent exister entre les conducteurs.

Pour une même batterie, on double la sensibilité de la méthode en remplaçant l'interrupteur I par un inverseur, suivant le schéma de la figure 6. Remarquons que pendant la manœuvre de l'inverseur, les potentiels des plateaux de charge restent bien déterminés, ce qui est indispensable dans l'application précise de cette méthode de zéro. Si la manœuvre de l'inverseur fait passer les potentiels des pla-

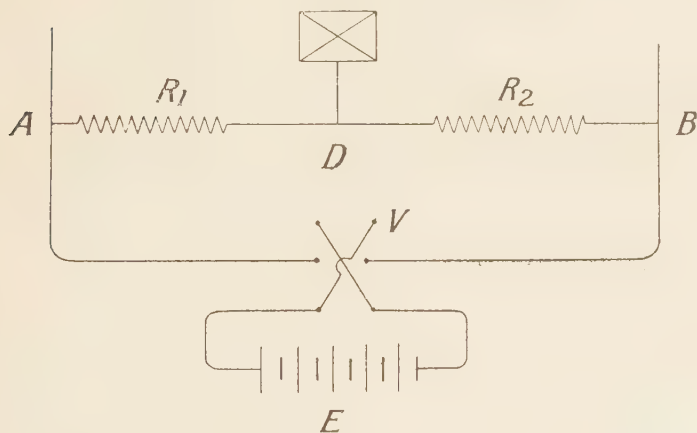


Fig. 6.

teaux de charge des valeurs $+V_1$ et $-V_2$ aux valeurs $-V_1$ et $+V_2$, la charge des quadrants isolés varie de :

$$\Delta q = -2C_1V_1 + 2C_2V_2$$

Si l'équilibre est réalisé, c'est-à-dire si le spot ne bouge pas :

$$\Delta q = 0 \qquad C_1R_1 = C_2R_2$$

Méthode nouvelle de mesure absolue d'un coefficient d'influence. — La balance de capacité permet donc de comparer, pour différentes positions du coefficient variable, la valeur C de ce coefficient à un coefficient fixe à déter-

miner C_0 . Le rapport des deux coefficients d'influence est donné par le rapport de deux résistances.

Si le coefficient variable était un condensateur plan parfait, sa valeur serait :

$$C = \frac{S}{4\pi(z - z_0)}$$

z étant la cote du plateau de charge, supposé horizontal, et z_0 la cote correspondant au contact du plateau de charge avec le plateau opposé. Le tambour et son index ont été gradués à partir d'une origine arbitraire et la variable z croît quand on écarte les plateaux.

Si nous voulons voir simplement comment le coefficient variable s'écarte d'un condensateur plan parfait, nous sommes conduits à représenter graphiquement le rapport :

$$\gamma = \frac{C_0}{C}$$

en fonction de z , puisque, dans le cas parfait, on obtiendrait la droite :

$$\gamma = z - \frac{4\pi C_0}{S} (z - z_0)$$

Toute autre représentation serait plus compliquée.

Si nous traduisons sous cette forme les résultats expérimentaux, nous obtenons la courbe de la figure 7 qui, sur une grande longueur, du point M (d'abscisse z_1) au point N (d'abscisse z_2) se confond *rigoureusement* avec une droite. Nous le montrerons au chapitre IV, où l'on trouvera les résultats d'une série de mesures et leur dépouillement. Nous utiliserons alors une autre représentation graphique qui permet, pour ainsi dire, l'agrandissement des écarts par rapport à la ligne droite. Que la courbe représentative se confonde de M en N avec une droite, cela veut dire que, pour une position z comprise entre z_1 et z_2 , on peut considérer le coefficient d'influence C comme la résultante du

coefficient C_1 , correspondant à la position z_1 , en cascade avec un coefficient d'influence C' d'épaisseur bien déterminée $(z - z_1)$:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C'} \text{ avec } C' = \frac{S}{4\pi_1(z - z_1)}$$

d'où :

$$\gamma = \gamma_1 + \frac{4\pi C_0}{S} (z - z_1)$$

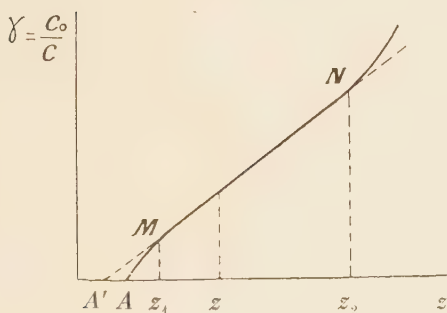


Fig. 7.

Il faut prendre pour S la surface du plateau relié à l'électromètre, ou plutôt cette surface augmentée de la moitié de l'aire correspondant au sillon de l'anneau de garde. Dans la formule précédente, tout est connu, sauf C_0 :

$$C_0 = \frac{S}{4\pi} \frac{\gamma - \gamma_1}{z - z_1} = \frac{Sz}{4\pi}$$

en appelant α le coefficient angulaire de MN . Le coefficient d'influence fixe est donc étalonné et, par cela même, le coefficient variable, pour toutes les positions du plateau de charge.

Au delà de M ou de N , la courbe représentative s'écarte de la droite MN :

1° Si les armatures sont trop éloignées, le principe de l'anneau de garde s'applique mal, il y a dispersion des lignes

de force émises par le plateau inducteur et, pour obtenir une capacité donnée, il faut que les armatures soient un peu plus rapprochées : la courbe se trouve donc *au-dessus* de la droite MN. La méthode permet de reconnaître avec *sécurité* dans quelles conditions on peut appliquer le principe de l'anneau de garde.

2° Quand on rapproche trop les plateaux, la courbe passe *au-dessous* de la droite MN. Nous allons essayer de rapporter cet écart au parallélisme imparfait des armatures et, en même temps, essayer d'expliquer comment, lorsque les plateaux ne sont pas trop rapprochés, la courbe se confond rigoureusement avec une droite, dans les limites où l'anneau de garde est efficace.

Etude du coin électrostatique. — 1° *Forme des lignes de force.* — Si les armatures AB et A'B' (fig. 8) sont à des potentiels opposés, le champ électrique est symétrique (au signe près) par rapport au plan bissecteur OM, qui est

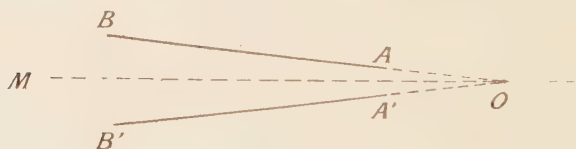


Fig. 8.

donc une surface équipotentielle. Aux bords du coin *électrostatique*, la forme des lignes de force dépend des potentiels des armatures, mais, loin des bords, le champ électrique ne dépend que de la *différence* des potentiels. Par conséquent, même si les armatures ne sont pas à des potentiels opposés, le champ, loin des bords du coin, reste symétrique par rapport au plan OM et ce plan est surface équipotentielle.

Continuons à faire abstraction des bords. Dans la région centrale du coin, métallisons le plan OM. Re commençons

avec les plans OM et AB le raisonnement que nous venons de faire pour les armatures AB et A'B'. Nous montrerons que, loin des bords du coin, le plan OM', bissecteur du plan AB et OM, est surface équipotentielle. Le plan OM', bissecteur des plans A'B' et OM, est aussi, loin des bords, surface équipotentielle et, de même, tous les plans passant par les armatures et par l'intersection de celles-ci. *Loin des bords du coin, les lignes de force sont donc circulaires.* Ce sont des arcs de cercle centrés sur l'intersection O du prolongement des armatures.

Si donc le plan AB représente une armature entourée de son anneau de garde, les lignes de force qui la reliaient à l'armature opposée sont des arcs de cercle. L'anneau de garde joue le même rôle que dans le cas du condensateur plan. Il masque l'influence des bords et les influences extérieures. Il est efficace, également efficace, pour donner des lignes de force circulaires dans le cas d'un coin électrostatique et des lignes de force rectilignes dans le cas du condensateur plan.

2° *Calcul du coefficient d'influence.* — Les lignes de force circulaires projettent sur l'électrode de charge une surface égale à la surface S de l'électrode isolée. Autrement dit, la section dS d'un tube de force ne varie pas le long de ce tube. Nous pouvons donc calculer le coefficient d'influence variable C que nous étudions par la formule :

$$C = \int \int \frac{dS}{4\pi e}$$

dS étant la section constante d'un tube de force élémentaire et e la longueur du tube.

Nous supposons le plateau de charge horizontal. Soit MN la droite de pente nulle passant par le centre O du plateau isolé et Ox la droite perpendiculaire de pente maxima (fig. 9). Nous ferons le calcul de C en découpant le plateau isolé en bandes élémentaires parallèles à MN et en asso-

çant à chaque bande dS la bande égale dS' symétrique par rapport à MN . Le coefficient d'influence correspondant à une paire de bandes élémentaires est :

$$dC = \frac{dS}{4\pi e} + \frac{dS'}{4\pi e'}$$

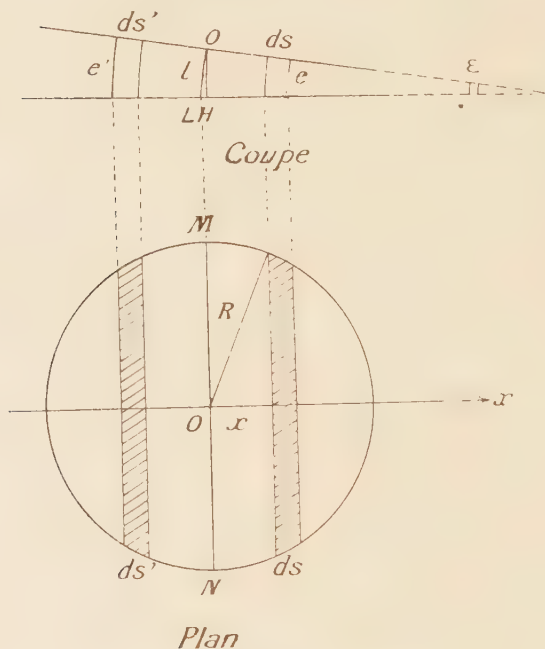


Fig. 9.

Appelons l la longueur de la ligne de force issue du centre O , ε l'angle des plateaux et x la distance des bandes élémentaires au centre O :

$$e = l - x\varepsilon \qquad e' = l + x\varepsilon$$

d'où :

$$dC = \frac{dS}{4\pi} \left(\frac{1}{l + x\varepsilon} + \frac{1}{l - x\varepsilon} \right)$$

$$dC = \frac{dS}{4\pi} \frac{2l}{l^2 - x^2\varepsilon^2} = \frac{dS}{2\pi l} \frac{1}{1 - \frac{x^2\varepsilon^2}{l^2}} = \frac{dS}{2\pi l} \left(1 + \frac{x^2\varepsilon^2}{l^2} + \dots \right)$$

Si les plateaux étaient parfaitement parallèles, on aurait :

$$dC = \frac{dS}{2\pi l} \quad C = \frac{\pi R^2}{4\pi l} = \frac{R^2}{4l}$$

Pour étudier les conséquences du parallélisme imparfait des plateaux, nous calculerons le terme complémentaire principal, en ε^2 :

$$\Delta C = \int \frac{dS}{2\pi l} \frac{x^2 z^2}{l^2}$$

L'élément de surface est une bande de largeur dx :

$$dS = 2 \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

d'où :

$$\Delta C = \frac{z^2}{\pi l^3} \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} x^2 dx$$

Posons $x = R \sin \alpha$. L'intégrale devient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha$$

On intègre facilement et on trouve :

$$\Delta C = \frac{R^4 \varepsilon^2}{16l^3}$$

d'où, pour le coefficient d'influence :

$$C = \frac{R^2}{4l} + \frac{R^4 \varepsilon^2}{16l^3} = \frac{R^2}{4l} \left(1 + \frac{R^2 \varepsilon^2}{4l^2} \right)$$

et pour le rapport γ :

$$\gamma = \frac{C_0}{C} = \frac{4C_0 l}{R^2} \frac{1}{1 + \frac{R^2 \varepsilon^2}{4l^2}} = \frac{4C_0 l}{R^2} \left(1 - \frac{R^2 \varepsilon^2}{4l^2} \right) = \frac{4C_0 l}{R^2} - \frac{C_0 \varepsilon^2}{l}$$

Ce qui nous intéresse, c'est la relation entre γ et z . Appelons z_1 la cote du centre O (fig. 9) :

$$OH = z - z_1$$

$$OL = l$$

Le rapport de ces deux longueurs est :

$$\frac{l}{z - z_1} = \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{3}$$

d'où :

$$l = (z - z_1) + \frac{\varepsilon^2 (z - z_1)}{3}$$

$$\gamma = \frac{4C_0(z - z_1)}{R^2} + \frac{4C_0(z - z_1)\varepsilon^2}{3R^2} - \frac{C_0\varepsilon^2}{z - z_1}$$

Le rapport des termes en ε^2 est :

$$\left(\frac{z - z_1}{R} \right)^2$$

Comme ce rapport est toujours petit, nous négligerons le plus petit terme, d'où :

$$\gamma = \frac{4C_0}{R^2} (z - z_1) - \frac{C_0\varepsilon^2}{z - z_1}$$

La courbe de γ en fonction de z tend asymptotiquement vers la droite de coefficient angulaire :

$$x = \frac{4C_0}{R^2} = \frac{16C_0}{D^2}$$

Le début de la courbe se trouve au-dessous de l'asymptote, ce qui est bien conforme aux expériences.

En résumé, l'équation de la courbe représentative est :

$$\gamma = x(z - z_1) - \frac{C_0 x \varepsilon^2}{\gamma} \quad (1)$$

et C_0 s'exprime en fonction du coefficient angulaire de l'asymptote :

$$C_0 = \frac{D^2 x}{16} \quad (2)$$

Application à la méthode de mesure absolue. — Au chapitre IV, nous rendrons compte d'une série de mesures effectuées avec une valeur de C_0 voisine de 10 cm. La courbe

expérimentale est rigoureusement rectiligne entre $\gamma = 1$ et $\gamma = 4$.

Suivant la théorie générale, nous calculerons C_0 par la formule :

$$C_0 = \frac{D^2}{16} \frac{\Delta\gamma}{\Delta z} \quad (3)$$

$\Delta\gamma$ et Δz étant les accroissements de γ et z pour l'intervalle ($\gamma = 1$, $\gamma = 4$).

Quelle erreur pouvons-nous commettre en opérant de cette façon ? La formule (3) ne se confond pas tout à fait avec la formule exacte (2). La formule (1) permet d'apprécier l'erreur commise.

L'examen des mesures nous conduira à prendre :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \text{ degré} = \frac{1}{120} \text{ radian}$$

D'autre part :

$$\alpha = \frac{16C_0}{D^2} = \frac{16 \times 10}{49} = 3,25$$

Pour $\gamma = 1$, la formule (1) montre que la différence d'ordonnée entre l'asymptote et la courbe est :

$$\frac{C_0 z \varepsilon^2}{\gamma} = \frac{10 \times 3,25}{(120)^2} = 0,002$$

Pour $\gamma = 4$, la différence est :

$$\frac{0,002}{4} = 0,0005$$

Par conséquent, en remplaçant α par $\frac{\Delta\gamma}{\Delta z}$, on commet l'erreur relative :

$$\frac{0,002 - 0,0005}{4 - 1} = \frac{1}{2000}$$

On calcule donc pour C_0 une valeur trop forte de $\frac{1}{2000}$ environ.

Sensibilité de la méthode. — Nous conduirons les mesures en nous donnant les résistances et en déterminant, pour chaque rapport de résistances, la valeur de z pour laquelle l'équilibre est réalisé. Dans ces conditions, la sensibilité est le quotient :

$$S = \frac{\partial l}{\partial z}$$

dont les termes sont définis de la façon suivante : l'équilibre étant réalisé, si on s'en écarte de ∂z , le spot se déplace de ∂l quand on manœuvre l'inverseur. Comme nous allons le voir, la sensibilité diminue quand on écarte les plateaux, car, pour une même variation ∂z , la variation du coefficient d'influence devient plus petite.

Le coefficient d'influence est donné approximativement par la formule :

$$C = \frac{S}{4\pi e} = \frac{D^2}{16e} \quad (1) \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial C}{C} = \frac{\partial e}{e} = \frac{\partial z}{e} \quad (2)$$

Nous avons vu (p. 19) que, lorsqu'on manœuvre l'inverseur, la charge des quadrants isolés varie de :

$$\Delta q = -2CV_1 + 2C_0V_2$$

A l'équilibre :

$$\Delta q = -2CV_1 + 2C_0V_2 = 0 \quad \text{d'où} : \quad CV_1 = C_0V_2 \quad (3)$$

Au voisinage de l'équilibre :

$$\Delta q = \partial q = -2(\bar{C} + \partial C)V_1 + C_0V_2$$

d'où :

$$\partial q = -2V_1\partial C$$

Si $s = \frac{\partial l}{\partial q}$ est la sensibilité de l'électromètre, la sensibilité de la méthode est donc :

$$S = \frac{\partial l}{\partial z} = -2V_1s \frac{\partial C}{\partial z}$$

Comme la tension de la batterie est :

$$V = V_1 + V_2$$

l'équation (3) donne :

$$V_1 = \frac{C_0 V}{G + C_0}$$

d'où, en faisant intervenir l'équation (2) :

$$S = \frac{\delta l}{\delta \varepsilon} = \frac{2C_0 V s}{G + C_0} \frac{G}{e} = \frac{2C_0 V s}{(1 + \gamma)e}$$

La sensibilité de l'électromètre utilisé, que nous étudions au chapitre suivant, est donc :

$$s = \frac{\delta l}{\delta \eta} = 900 \text{ mm. par U. E. S.}$$

Nous ferons une série de mesures avec un coefficient fixe ayant une valeur C_0 voisine de 10 cm. Avec une batterie de :

$$450 \text{ volts} = 1,5 \text{ U. E. S.}$$

nous aurons, dans tous les cas, une sensibilité suffisante pour déterminer z à un micron près. Faisons :

$$\delta z = 1 \mu = 10^{-4} \text{ cm.}$$

et calculons δl pour différents cas :

1° $\gamma = 9$. La distance des plateaux est, d'après la formule (1) :

$$e = \frac{D^2 \gamma}{16 C_0} = 2,75 \text{ cm.}$$

d'où :

$$\delta l = \frac{20 \times 1,5 \times 900}{27,5} \cdot 10^{-4} = \frac{1}{10} \text{ mm.}$$

2° $\gamma = 1$. Les plateaux sont beaucoup plus rapprochés :

$$e = 0,3 \text{ cm.}$$

$$\delta l = \frac{20 \times 1,5 \times 900}{2 \times 0,3} \cdot 10^{-4} = 4,5 \text{ mm.}$$

La sensibilité est de 4,5 mm. par micron. Elle est très grande et on peut prendre V plus petit.

Ces calculs sont en accord avec les mesures dont nous rendrons compte au chapitre IV.

CHAPITRE III

Etude de l'Electromètre à quadrants.

L'électromètre à quadrants, nécessaire pour l'application de la méthode exposée au chapitre précédent, doit être employé en circuit ouvert, pour constater l'égalité, en valeur absolue, des charges appelées sur les armatures isolées du coefficient d'influence variable et du coefficient d'influence fixe. Or, si l'électromètre permet facilement la mesure des potentiels, la mesure des charges est plus délicate. Aussi est-il bon de bien connaître l'électromètre utilisé. J'ai donc relevé les caractéristiques de l'électromètre Beaudoin dont je me suis servi, ce qui m'a donné l'occasion de simplifier les méthodes indiquées par Moulin ⁽¹⁾ pour la mesure des principales constantes d'un électromètre.

Quand on emploie l'électromètre en circuit ouvert, la précision des mesures est habituellement limitée par le déplacement spontané du spot. J'ai indiqué comment on peut éliminer ce phénomène, soit quand on applique une méthode de zéro, soit quand on mesure des charges en notant les déviations correspondantes. Dans l'application de la méthode du chapitre précédent, seul le premier cas nous intéresse. Il m'a semblé utile néanmoins de montrer aussi comment on peut opérer dans le second cas.

Enfin, dans ce chapitre où il est question de la difficulté de la mesure des charges, j'ai trouvé intéressant de résumer

(¹) *Le Radium*, 1907, 4, p. 145 et p. 188.

des expériences concernant le cas particulièrement délicat où les mesures de charges doivent s'effectuer à proximité d'une installation à rayons X.

Rappel des résultats de la théorie de l'électromètre. —

Nous supposerons un électromètre à quadrants *parfait*, c'est-à-dire possédant deux plans de symétrie rectangulaires passant par le fil de torsion et par les fentes des quadrants, et nous négligerons les couples directeurs électriques.

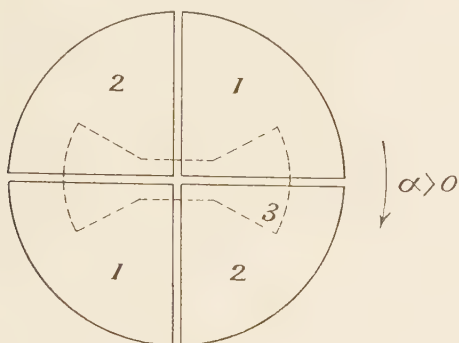


Fig. 10.

Les conducteurs en présence sont les deux paires de quadrants 1 et 2, l'aiguille 3 et l'enceinte protectrice, reliée au sol (potentiel zéro). Les quadrants 1 seront ceux qu'un dispositif spécial (électromagnétique ou autre) permet d'isoler à distance ; ce sont les quadrants auxquels on réunit les conducteurs qui doivent recueillir les charges à mesurer.

Une rotation α de l'aiguille sera positive (fig. 10) quand l'aiguille s'écartera des quadrants 1 pour s'engager davantage entre les quadrants 2. Avec cette convention, les signes des formules sont positifs et ne dépendent pas de la position des deux paires de quadrants par rapport à l'aiguille.

Quand l'aiguille tourne de l'angle α , le coefficient d'in-

fluence entre les quadrants 1 et l'aiguille (qui est négatif, comme tout coefficient d'influence) augmente de $b\alpha$; b est une constante positive et nous négligeons les termes en α^2 et les termes supérieurs. Corrélativement, le coefficient d'influence entre les quadrants 2 et l'aiguille diminue de $b\alpha$.

Appelons γ la constante du fil de torsion, V_1 , V_2 et V_3 les potentiels des quadrants 1 et 2 et de l'aiguille. Quand V_1 et V_2 passent de la valeur zéro aux valeurs V_1 et V_2 , l'aiguille tourne d'un angle α donné par la formule :

$$\gamma\alpha = b(V_1 - V_2) \left[V_3 - \frac{V_1 + V_2}{2} \right] \quad (1)$$

Dans le montage hétérostatique dissymétrique, on porte l'aiguille à un potentiel fixe V grand devant le potentiel à mesurer v ; on applique celui-ci aux quadrants 1 et on laisse au sol les quadrants 2 (ou inversement) :

$$\alpha = \frac{bV}{\gamma} v \quad (2)$$

Dans le montage idiostatique, on fait $V_1 = V_3 = v$ et $V_2 = 0$:

$$\alpha = \frac{b}{\gamma} v \quad (3)$$

Mesure des charges. — On utilise le montage hétérostatique dissymétrique ; les quadrants 1, qui peuvent être isolés, sont reliés au système destiné à recueillir les charges. L'ensemble du système isolé est protégé avec les précautions habituelles. Soit C la capacité *totale* du système isolé, et supposons qu'il recueille la charge q . Si l'aiguille ne tournait pas, on aurait :

$$q = Cv$$

En fait, la rotation de l'aiguille entraîne une variation $b\alpha$ du coefficient d'influence entre les quadrants 1 et l'aiguille,

d'où une variation $-b\alpha$ de la capacité C et surtout une variation $b\alpha V$ de la charge appelée par l'aiguille sur les quadrants 1, d'où :

$$q = (C - b\alpha)v + b\alpha V$$

Le terme $b\alpha v$ est négligeable :

$$q = Cv + b\alpha V \quad (4)$$

La charge q , le potentiel v et la déviation α sont reliés par les relations (2) et (4) ; ces trois grandeurs sont proportionnelles :

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{bVv}{\gamma} = kv \\ q = \left(C + \frac{b^2V^2}{\gamma} \right) v = \Gamma v \\ \alpha = k \frac{q}{V} = Kq \end{array} \right.$$

Γ est la *capacité apparente* du système isolé ; k et K représentent la sensibilité au potentiel et à la charge. Γ est positif ; k et K ont le signe du potentiel de l'aiguille.

En fait, les déviations ne sont pas rigoureusement proportionnelles aux charges et il faut étalonner l'électromètre. En vue de cette opération, le système isolé comporte un coefficient d'influence de valeur connue $\mathcal{C}$. Quand on porte à un potentiel connu $\mathcal{V}$ l'armature qui fait face à l'armature isolée, tout se passe, sauf en ce qui concerne le coefficient étalon, comme si le système isolé recueillait la charge connue :

$$q = \mathcal{C}\mathcal{V}$$

La formule (4) s'écrit alors :

$$\mathcal{C}\mathcal{V} = Cv + b\alpha V \quad (6)$$

Détermination des constantes. — Nous mesurerons les constantes b , γ et C de l'électromètre et du montage électrostatique qui nous serviront à l'application de la méthode exposée au chapitre précédent. Ainsi, la capacité totale C et la sensibilité aux charges garderont des valeurs connues. Le montage en question fait partie de la figure 5 ; il est reproduit séparément sur la figure 11. AB représente le

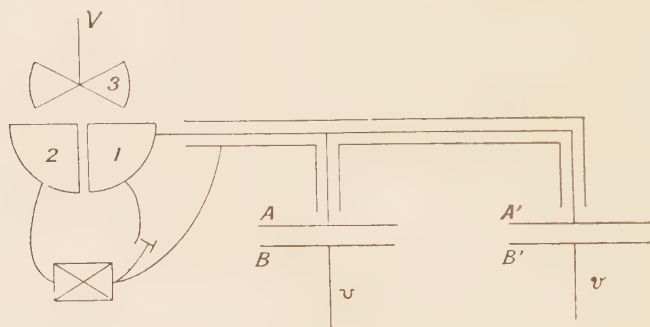


Fig. 11.

condensateur décrit au chapitre I ; nous le placerons dans la position où son coefficient d'influence est maximum et nous laisserons au sol son armature B.

A/B' représente le coefficient d'influence variable décrit au chapitre II. Des mesures préliminaires ont fait connaître sa valeur pour différentes positions. Dans la détermination de b et C , il nous servira de *coefficient d'influence étalon*. Nous le fixerons à la position $z = 18$, pour laquelle sa valeur est $\mathcal{C} = 1,991$ cm.

Mesure de b et de C . — Étalonnons l'électromètre pour une charge déterminée $q = \mathcal{C}\mathfrak{V}$ en portant l'armature B' au potentiel $\mathfrak{V}$, après avoir isolé l'électromètre. Le système isolé

prend le potentiel v et l'aiguille tourne de l'angle α . Divisons par v les deux membres de la formule (6) :

$$\frac{\mathcal{C}\mathcal{V}}{v} = C + b \frac{x}{v} V \quad (7)$$

Recommençons la mesure de α pour différentes valeurs V du potentiel de l'aiguille. Pour chaque valeur de V , nous mesurerons aussi le potentiel v correspondant à la déviation obtenue. Il suffit de reproduire exactement celle-ci en appliquant aux quadrants 1, à l'aide d'un potentiomètre, le potentiel nécessaire. Si on porte $y = \frac{\mathcal{C}\mathcal{V}}{v}$ en fonction de $x = \frac{\alpha V}{v}$, on doit obtenir une droite. L'ordonnée à l'origine donnera C et le coefficient angulaire donnera b .

J'ai fait une série de mesures avec :

$$\mathcal{C} = 1,991 \text{ cm.} \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = 21 \text{ volts}$$

ce qui donne des déviations α correspondant à la charge :

$$q = \mathcal{C}\mathcal{V} = 1,991 \times \frac{21}{300} = 0,14 \text{ U. E. S.}$$

Les mesures se plaçant exactement sur une droite, j'ai trouvé :

$$C = 119,3 \text{ cm.} \quad \text{et} \quad b = 3,9 \frac{\text{cm}}{\text{rad.}}$$

Mesure de γ . — Comme nous connaissons déjà b , l'application de la formule (1) donnera γ . Le mieux est de s'adresser à la méthode idiostatique, car alors, le potentiel de l'aiguille étant relativement petit, les couples directeurs, que nous avons négligés, sont moins importants. Seulement, dans ce cas, il faut compter avec les f. e. m. de contact. On peut les compenser : c'est ce que fait Moulin. La méthode suivante est plus rapide :

Soit ϵ la f. e. m. de contact entre les quadrants 1 et l'aiguille, et η la f. e. m. de contact entre les deux paires

de quadrants. Nous appliquons la différence de potentiel connue v entre les quadrants 1 (reliés à l'aiguille) et les quadrants 2 :

$$V_1 - V_2 = v + \eta \quad V_3 = V_1 + \varepsilon$$

Appliquons la formule (1) ; on trouve :

$$\alpha' = b(v + \eta) \left(\frac{v}{2} + \varepsilon + \frac{\eta}{2} \right)$$

ou, en développant :

$$\gamma\alpha = b \left[\frac{v^2}{2} + v(\varepsilon + \eta) + \eta \left(\varepsilon + \frac{\eta}{2} \right) \right]$$

Dans cette formule, α représente l'angle de torsion du fil. Le zéro à partir duquel on mesure les déviations est défini par $v = 0$. Il correspond à un angle de torsion α_0 donné par la formule :

$$\gamma\alpha_0 = b\eta \left(\varepsilon + \frac{\eta}{2} \right)$$

Si donc on veut que α représente l'angle dont tourne l'aiguille quand on applique le potentiel v , il faut écrire :

$$\gamma\alpha = b \left[\frac{v^2}{2} + v(\varepsilon + \eta) \right]$$

Changeons le signe du potentiel v : nous obtenons la déviation α' :

$$\gamma\alpha' = b \left[\frac{v^2}{2} - v(\varepsilon + \eta) \right]$$

La déviation moyenne est proportionnelle à v^2 :

$$\frac{\alpha + \alpha'}{2} = \frac{bv^2}{2\gamma}$$

C'est la déviation qu'on obtiendrait en appliquant le potentiel v si les f. e. m. de contact étaient nulles. En représentant $(\alpha + \alpha')$ en fonction de v^2 , on doit obtenir une droite de coefficient angulaire égal à $\frac{b}{\gamma}$.

Le tableau suivant donne les résultats d'une série de mesures : v est exprimé en volts, d et d' sont les déviations du spot, en millimètres, proportionnelles aux rotations α et α' de l'aiguille (l'échelle était à un mètre) :

v	d	d'
$4,1 \times 1$	80,9	54,2
$\times 0,875$	63,2	39,9
$\times 0,750$	47,8	27,9
$\times 0,625$	34,7	17,9
$\times 0,500$	23,5	10,2

En portant $(d + d')$ en fonction de v^2 , on trouve effectivement une droite passant par l'origine. Calculons $\frac{b}{\gamma}$ d'après le coefficient angulaire. Il faut exprimer les potentiels en U. E. S. ; on trouve :

$$\frac{b}{\gamma} = 362 \quad \gamma = 0,0108 \text{ C. G. S.}$$

On a :

$$\gamma(\alpha - \alpha') = 2bv(\varepsilon + \eta)$$

A titre d'indication, calculons la f. e. m. de contact $(\varepsilon + \eta)$ entre l'aiguille et les quadrants 2. Si on représente $(d + d')$ en fonction de v^2 , on obtient une droite ; le coefficient angulaire donne :

$$\varepsilon + \eta = 0,40 \text{ volt.}$$

Application. — Nous avons obtenu :

$$h = 3,9 \text{ cm./rad.} \quad \gamma = 0,0108 \text{ C. G. S.} \quad C = 119 \text{ cm.}$$

Portons l'aiguille à un potentiel $V = 90$ volts = 0,3 U. E. S. et calculons, à l'aide des formules (5), la capacité apparente Γ du système isolé et les sensibilités k et K :

$$\Gamma = C + \frac{h^2 V^2}{\gamma} = 119 + 127 = 246 \text{ cm.}$$

$$k = \frac{bV}{\gamma} = 108 \frac{\text{rad.}}{\text{U. E. S.}}$$

$$K = \frac{k}{\Gamma} = 0,44 \frac{\text{rad.}}{\text{U. E. S.}}$$

Avec une échelle à un mètre, la sensibilité au potentiel est :

$$\frac{108 \times 2}{300} = 0,72 \frac{m}{\text{volt}}$$

et la sensibilité à la charge :

$$0,44 \times 2 = 0,88 \frac{m}{\text{C. E. S.}}$$

Ces résultats sont d'accord avec les valeurs obtenues directement.

Mouvement spontané du spot. — En principe, quand on isole l'électromètre, l'équilibre électrostatique n'est pas troublé et le spot ne bouge pas. En fait, il se produit quelquefois une petite déviation parasite du spot, due à une électrisation par frottement, quand on coupe la communication des quadrants 1 avec le sol.

Il arrive aussi que les boucles aux extrémités du fil de torsion soient sales ou oxydées, ce qui peut introduire une résistance considérable. L'aiguille se charge avec une constante de temps très grande ; son potentiel ne devient sensiblement égal à la f. e. m. de la batterie qu'au bout de plusieurs heures. Quand on isole l'électromètre, le spot dévie assez rapidement.

Les phénomènes précédents sont accidentels, mais on observe généralement, quand l'électromètre est isolé, un mouvement lent et spontané du spot, dû à une petite conductibilité entre l'aiguille et les quadrants 1. Le mouvement du spot est beaucoup plus rapide quand l'électromètre a été *activé*.

Comme le système isolé prend une charge ayant le signe du potentiel V de l'aiguille, la formule (5 *ter*) montre que la déviation du spot a toujours lieu dans le sens positif.

Au bout de plusieurs heures, le spot atteint une position

d'équilibre, d'ailleurs mal définie ; la fuite par les isolants d'ambre est devenue assez importante pour compenser la conductibilité entre l'aiguille et les quadrants isolés.

On peut écrire *grossièrement* l'équation du phénomène :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} - \frac{v}{r}$$

q est la charge acquise pendant le temps t , depuis le moment où l'on a isolé l'électromètre, v le potentiel du système isolé (au temps t), V celui de l'aiguille. R représente la résistance entre l'aiguille et les quadrants isolés, r la résistance des isolants. Ces résistances sont mal définies ; il en résulte que le phénomène est quelquefois plus complexe.

Comme $\alpha = Kq = kv$, la vitesse initiale est :

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_0 = K \frac{V}{R}$$

et la déviation d'équilibre :

$$x = k \frac{rV}{R}$$

Pour l'électromètre dont je me suis servi, la vitesse initiale est voisine de 1 mm. 5 par minute. Supposons une déviation d'équilibre égale à 25 cm. Soit $V = 90$ volts ; la sensibilité à la charge est environ :

$$0,90 \frac{m}{\text{U. E. S.}} = 2,7 \cdot 10^9 \frac{m.}{\text{coul.}}$$

et la sensibilité au potentiel $0,70 \frac{m}{\text{volt}}$. Les équations précédentes permettent de calculer l'ordre de grandeur de R et r :

$$R = \frac{2,7 \cdot 10^9 \times 90 \times 60}{0,0015} = 10^{16} \text{ ohms} = 10^{10} \text{ mégohms}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{0,70 \times 90}{0,25} = 250$$

Élimination du mouvement spontané et des fuites. —

Quand l'électromètre sert d'appareil de zéro, on élimine facilement le phénomène précédent en isolant l'électromètre longtemps à l'avance. On atteint l'équilibre dont nous avons parlé et on obtient ainsi un zéro immobile. Naturellement, il faut laisser l'électromètre constamment isolé. Cet artifice permet des interpolations précises et je l'ai utilisé pour effectuer les mesures dont il sera rendu compte au chapitre suivant.

Quand on mesure des charges par les déviations produites il faut s'arranger pour que les déviations soient positives ; il suffit de choisir convenablement le signe de l'aiguille. Sinon, les fuites électrostatiques et la conductibilité de l'air, au lieu de se compenser partiellement, ajoutent leurs effets.

On élimine complètement les erreurs dues aux fuites et au mouvement spontané par la commande automatique des mesures et la photographie du spot. J'ai réalisé un système de contacts tournants, entraînés par un petit moteur synchrone, qui effectuent les opérations successives constituant une mesure. Prenons par exemple le cas où les charges à mesurer sont produites par le passage d'un pinceau de rayons X, pendant quelques secondes, à travers une chambre d'ionisation.

A des intervalles déterminés et réglables, les contacts tournants :

- 1° Isolent l'électromètre, en fermant le circuit du relais électromagnétique.

- 2° Ferment, puis ouvrent, le primaire du transformateur haute tension.

- 3° Ferment, puis ouvrent, le circuit de la lampe qui produit le spot.

- 4° Remettent l'électromètre au sol.

Il est commode de réaliser chaque contact tournant suivant le dessin 12. Sur l'arbre A sont serrés par des vis deux secteurs S et S' sur lesquels appuient les frotteurs *f* et *f'*.

En réglant l'azimut des deux secteurs, on peut faire que le courant passe au moment voulu et pendant le temps voulu.

Il est utile d'avoir deux arbres de vitesses différentes :

a) un arbre lent, faisant un tour en une ou deux minutes, temps nécessaire pour effectuer une mesure et remettre le spot au zéro ;

b) un arbre plus rapide, faisant un nombre entier de tours à chaque tour du premier arbre. Dans l'exemple que

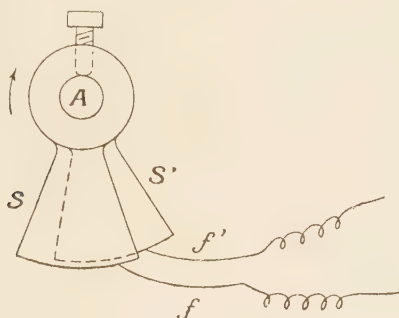


Fig. 12.

nous avons choisi, il faut établir franchement et couper brusquement le courant primaire du transformateur, qui est assez intense. On mettra en série deux contacts tournants, l'un entraîné par l'arbre lent, l'autre par l'arbre rapide. On réglera la position des secteurs de façon que le courant passe une fois par tour de l'arbre lent et soit établi et coupé par le contact rapide.

Pour la photographie du spot, on se procure facilement des plaques de forme convenable, que l'on fixe sur l'échelle divisée avec des pinces à dessin. On dépouille les mesures avec un appareil à lire les spectres.

On effectuera l'étalonnage en charges en s'arrangeant pour que le mouvement spontané et les fuites jouent encore

pendant les mêmes intervalles de temps. De cette façon, le mouvement spontané se traduit par un *petit* déplacement du zéro et les fuites par une *petite* diminution de la sensibilité.

Protection du circuit de l'aiguille. — Nous avons rappelé que le système isolé devait être soigneusement protégé. Dans certains cas, il faut protéger de la même façon le circuit de l'aiguille, c'est-à-dire la batterie E qui charge l'aiguille, la résistance de protection R et les connexions (fig. 13).

Il arrive fréquemment, par exemple, que l'on ait à faire

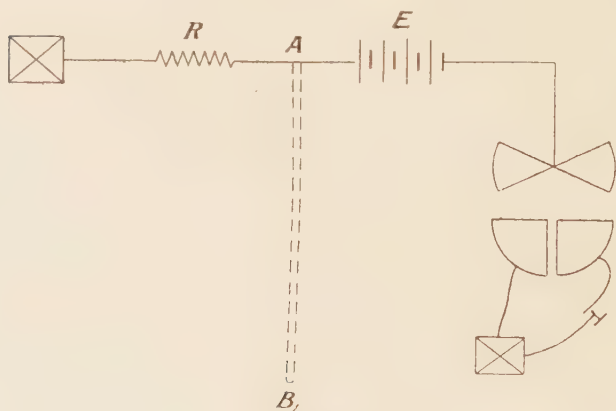


Fig. 13.

des mesures de charges pendant le fonctionnement d'une installation à rayons X. Si la haute tension est redressée par un contact tournant, les étincelles par lesquelles passe le courant sont des étincelles oscillantes et il y a émission d'ondes électromagnétiques. On s'en aperçoit immédiatement si un appareil récepteur se trouve aux environs ; la réception de ces ondes parasites produit un crépitement intense qui couvre toute autre réception.

Quand le circuit de l'aiguille n'est pas protégé, les ondes

rendent impossibles les mesures électrométriques. Les expériences suivantes précisent la nature des perturbations. L'installation haute tension débitait 7 milliampères sous 10 cm. d'étincelle entre pointes. Les rayons X étant complètement absorbés par une caisse épaisse en plomb, ne pouvaient produire eux-mêmes aucune perturbation.

1° Le circuit de l'aiguille étant placé, ainsi que l'électromètre, à l'intérieur d'une caisse métallique reliée au sol, aucune déviation du spot ne se produisait quand, après avoir isolé l'électromètre, je mettais en marche l'installation haute tension.

2° Simplement en attachant au point A de la figure un fil conducteur de plusieurs mètres, sortant de la caisse de protection, j'ai obtenu une déviation de 12 mm. L'électromètre est alors parcouru par des courants de haute fréquence ; les potentiels de l'aiguille et des quadrants sont perturbés et prennent des valeurs alternatives.

3° En réalité, le fil conducteur était composé de deux fils torsadés réunis à leurs extrémités en A et en B. Après avoir séparé les extrémités réunies en A, j'ai obtenu la même déviation parasite.

4° Maintenant, en intercalant au point B (qui se trouvait environ à un mètre du contact tournant) une self de T. S. F., j'ai obtenu une déviation différente : 18 mm.

Ces expériences montrent que le champ électromagnétique peut produire des effets d'antenne et des effets d'induction magnétique sur le circuit de l'aiguille, quand on ne protège pas celui-ci.

Ces phénomènes parasites sont extrêmement capricieux. J'ai pu répéter les expériences précédentes et obtenir les mêmes déviations. Mais il m'est arrivé, en répétant les expériences à nouveau, immédiatement après, de voir les déviations changer d'importance et même le spot sortir avec rapidité de l'échelle. Ces variations sans raison apparente sont fréquentes au cours d'essais de ce genre. Les déviations

importantes se produisent comme par saccades et se maintiennent en partie quand on arrête l'installation à rayons X. La charge du système isolé varie donc ; les isolants d'ambre sont sans doute soumis à des tensions alternatives dissymétriques dont les maxima sont relativement élevés.

Il est difficile d'étudier systématiquement ces phénomènes par trop variables. En tout cas, on élimine complètement les perturbations en prenant la précaution de protéger électrostatiquement tout le circuit de l'aiguille.

CHAPITRE IV

Détermination des coefficients d'influence du condensateur. Mesures.

Appliquons la méthode de mesure absolue développée au chapitre II. Le rapport γ du coefficient fixe C_0 au coefficient variable C est égal au rapport de deux résistances. Comme coefficient fixe, nous prenons le condensateur décrit au chapitre I. Nous avons décrit le coefficient variable, qui est à la base de la méthode. Étudions maintenant le potentiomètre que forment les deux résistances.

Potentiomètre de résistances. — Nous avons vu que la sensibilité de la méthode diminue rapidement quand on écarte les plateaux du coefficient variable. Pour obtenir la précision désirable, il faut alors appliquer au potentiomètre une tension assez élevée. Les résistances du potentiomètre doivent être prévues en conséquence.

J'ai utilisé six bobines de fil d'argentan, d'environ 15.000 ohms, isolées à 500 volts, supportant 20 milliampères. Nous appellerons ces six résistances R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , R_5 et R_6 .

Chacune des deux branches du potentiomètre sera constituée par des bobines en série ou en dérivation. On obtiendra ainsi un certain nombre de combinaisons, donnant différentes valeurs au rapport des résistances des deux branches. Il faut connaître ces valeurs avec précision.

J'ai déterminé à l'électromètre, par une méthode de double pesée, les différences entre les résistances :

$$r_2 = R_2 - R_1, \quad r_3 = R_3 - R_1, \dots$$

Il suffit alors de mesurer, sans grande précision, la valeur d'une résistance, R_1 par exemple. En effet, soit à calculer le rapport $\frac{R_2}{R_1}$:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_1 + r_2}{R_1} = 1 + \frac{r_2}{R_1}$$

Un tel terme $\frac{r_2}{R_1}$ n'est en somme qu'un terme correctif résultant de l'égalité imparfaite des résistances. J'ai trouvé, au pont de Wheatstone :

$$R_1 = 14.815 \text{ ohms}$$

La mesure des différences r a été faite en utilisant la balance de capacité préparée pour l'application de la méthode de mesure absolue. Si on laisse fixe le coefficient variable et l'une des résistances du pont, à l'équilibre l'autre résistance garde toujours la même valeur, quelle que soit sa composition. On déduit de là une méthode de double pesée. Le mieux est de donner au coefficient variable une valeur voisine de l'égalité avec le coefficient fixe.

Nous voulons comparer à la résistance R_1 les résistances $R_2, R_3, \dots$. Nous établirons le potentiomètre de la façon suivante : d'un côté, l'une des résistances à comparer à R_1 , par exemple R_2 ; de l'autre côté, nous placerons R_1 , puis R_3, R_4, R_5 et R_6 , en série avec une boîte de résistances. A l'aide de cette boîte de résistances, que nous ajustons à des valeurs notées r , nous réalisons les équilibres :

$$\begin{aligned} R_2 &\rightleftharpoons R_1 + r \\ R_2 &\rightleftharpoons R_3 + r' \\ R_2 &\rightleftharpoons R_4 + r'', \dots \end{aligned}$$

d'où, par la double pesée, les différences :

$$r_3 = R_3 - R_1 = r - r'$$

$$r_4 = R_4 - R_1 = r - r''$$

.....

Enfin, nous mesurerons de la même façon la différence entre R_2 et R_1 .

J'ai trouvé les différences suivantes, exactes à un ohm près :

$$r_2 = 116 \text{ ohms}$$

$$r_5 = 158 \text{ ohms}$$

$$r_3 = 121$$

$$r_6 = 190$$

$$r_4 = 101$$

Combinaison des résistances. — Nous utiliserons les combinaisons de résistances indiquées dans la première colonne du tableau I. Le signe / sépare les deux combinaisons de résistances qui constituent les deux côtés du potentiomètre.

TABLEAU I

	γ
$R_2/R_1 + R_5 + R_6$	$\frac{1}{3}$
$R_2 + R_3/R_1 + R_5 + R_6$	$\frac{2}{3}$
R_2/R_1	1
$R_2 + R_3/R_1$	2
$R_2 + R_3 + R_4/R_1$	3
$R_2 + R_3 + R_4 + R_5/R_1$	4
$R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6/R_1$	5
$R_3/R_1 - R_2$	2
$R_3 + R_4/R_1 - R_2$	4
$R_3 + R_4 + R_5/R_1 - R_2$	6
$R_3 + R_4 + R_5 + R_6/R_1 - R_2$	8
$R_4 + R_5 + R_6/R_1 - R_2 - R_3$	9

Des résistances séparées par le signe + sont en série ; des résistances séparées par le signe — sont en dérivation. On obtient pour le rapport γ des valeurs voisines des rapports simples indiqués dans la deuxième colonne. J'ai vérifié que le coefficient de température est assez faible pour que le rapport des résistances soit altéré d'une façon insensible quand les résistances sont traversées par des courants différents.

Il est important, au point de vue de la précision, de passer d'une mesure à une autre en modifiant *régulièrement* le potentiomètre. Nous allons expliquer pourquoi. Supposons que nous passions de $\gamma = 4$ à $\gamma' = 5$, en utilisant les combinaisons du tableau précédent. Les valeurs exactes de γ sont :

$$\gamma = \frac{R_2 + R_3 + R_4 + R_5}{R_1} = 4 + \frac{r_2 + r_3 + r_4 + r_5}{R_1}$$

avec une erreur possible : $\delta\gamma = \frac{4 \times 1}{15\,000}$

$$\gamma' = \frac{R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6}{R_1} = 5 + \frac{r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6}{R_1}$$

avec une erreur possible : $\delta\gamma' = \frac{5 \times 1}{15\,000}$

D'où :

$$\Delta\gamma = \gamma' - \gamma = 1 + \frac{r_6}{R_1}$$

D'après cette formule, l'erreur relative sur $\Delta\gamma$, et par conséquent l'erreur relative correspondante sur le coefficient angulaire de la courbe $\gamma(z)$ est :

$$\frac{1}{15\,000}$$

Au contraire, si on réalisait les rapports $\gamma = 4$ et $\gamma' = 5$ d'une façon *quelconque*, l'erreur relative serait :

$$\frac{\delta\gamma + \delta\gamma'}{\Delta\gamma} = \frac{9}{15\,000}$$

Il est donc avantageux d'effectuer les mesures par séries où l'on modifie régulièrement le potentiomètre. C'est pourquoi on trouve dans le tableau précédent deux dispositions de résistances permettant d'établir le rapport 2 et le rapport 4.

Mesures. — On peut tracer expérimentalement la courbe $\gamma(z)$ soit en se fixant γ et en ajustant z , soit en se fixant z et en ajustant γ à l'aide d'une boîte de résistances. Les boîtes de résistances ne sont généralement garanties qu'au millième. La seconde façon d'opérer demanderait l'étalonnage précis d'une boîte de résistances et, de plus, nous venons de voir qu'il est avantageux de modifier régulièrement le potentiomètre. Pratiquement, on mène donc les mesures de la façon suivante :

1° On établit une combinaison de résistances.

2° Par tâtonnements, on amène le coefficient variable au voisinage de l'équilibre.

3° On place successivement plusieurs traits du tambour exactement devant l'index et on mesure chaque fois la déviation obtenue par la manœuvre de l'inverseur.

4° Chaque division du tambour représente 10 microns ; la sensibilité est suffisante pour que l'on puisse interpoler et donner le micron.

Le tableau II donne les résultats d'une série de mesures effectuées en plaçant le condensateur du chapitre I, choisi comme coefficient fixe, à sa position *minimum*.

On a utilisé successivement toutes les combinaisons de résistances du tableau I et les rapports γ ont été calculés d'après les valeurs des différences r et de la résistance R_1 .

On voit qu'entre $z = 5$ mm. et $z = 14$ mm., la courbe est très exactement rectiligne. Le coefficient angulaire, dont nous ferons plus loin le calcul précis, est voisin de 0,323.

TABLEAU II

γ	z	$\frac{\Delta\gamma}{\Delta z}$
0,33333	2,917	0,3253
0,66679	3,942	0,3240
1,00785	4,9945	0,3231
2,01601	8,115	0,32285
3,02283	11,2335	0,32315
4,03350	14,361	0,3239
5,04634	17,488	
2,0085	8,091	0,3230
4,0143	14,301	0,3245
6,0278	20,505	0,3301
8,0455	26,604	0,3413
9,0426	29,526	

Comme nous l'avons annoncé, le coefficient angulaire est plus grand avant et après la partie rectiligne.

Nouvelle représentation graphique. — Il est intéressant d'examiner graphiquement avec quelle exactitude toute une partie de la courbe est rectiligne. Même en portant γ et z à grande échelle, en fait sur une grande feuille de papier au millimètre, on ne peut mettre en évidence aucun écart avec la ligne droite, dans la région indiquée, et d'ailleurs la précision de la représentation, comparée à la précision des mesures, n'est pas encore suffisante. Nous allons nous adresser à une autre représentation.

Par un point A (fig. 14) du début de la partie rectiligne de la courbe $\gamma(z)$, menons une droite AB de coefficient

angulaire égal à 0,323. Nous savons que le coefficient angulaire de la partie rectiligne de la courbe est voisin de cette valeur. Dans la partie rectiligne, la courbe se confondra presque avec la droite AB. Les différences entre les abscisses de la droite et de la courbe :

$$BC = \eta$$

seront très petites et nous pourrons les représenter à grande échelle en fonction de γ .

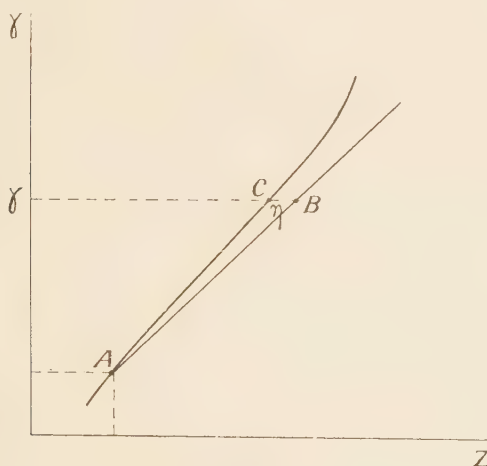


Fig. 14.

Au début de la partie rectiligne de la courbe, nous avons déterminé un point de coordonnées :

$$z = 4,9945$$

$$\gamma = 1,00785$$

Ce sera le point A et nous effectuerons le changement de coordonnées :

$$\eta = \frac{\gamma - 1,00785}{0,323} - (z - 4,9945)$$

$$\gamma = \gamma$$

C'est un changement de variables linéaire qui doit laisser rectiligne la partie rectiligne de la première courbe représentative. η est une longueur substituée à la distance des électrodes pour permettre une représentation à grande échelle des écarts avec la ligne droite. Nous pouvons maintenant facilement prendre 1 mm. pour représenter 1 micron, ce qui est suffisant, car les z et par conséquent les η sont connus à un micron près.

Le tableau III traduit en nouvelles coordonnées γ et η les résultats du tableau II ; η est exprimé en microns.

TABLEAU III

γ	ϵ_1	ϵ_2
0,33333	— 11	— 10
0,66679	— 3	— 3
1,00785	0	0
2,01601	+ 1	0
3,02283	— 0,5	— 2,5
4,03350	+ 1	— 2
5,04634	+ 9	+ 5
2,0085	+ 1,5	+ 0,5
4,0143	+ 1	+ 2
6,0278	+ 31	26
8,0455	+ 179	
9,0426	+ 343	

La figure 15 représente η en fonction de γ . On voit qu'entre $\gamma = 1$ et $\gamma = 4$, les points expérimentaux se placent sur une droite, à un micron près. C'est justement la précision avec laquelle les mesures ont été faites. La partie rectiligne de la courbe est *ascendante*, ce qui montre que le coefficient angulaire de la partie rectiligne de la courbe $\gamma(z)$ est plus grand que la valeur 0,323 qui intervient dans le changement de coordonnées.

Effectuons un changement de coordonnées voisin, avec

le paramètre 0,3231. Il suffit de diminuer les η exprimés en microns, de :

$$1000 \left(\frac{\gamma - 1}{0,323} - \frac{\gamma - 1}{0,3231} \right), \text{ approximativement égal à } \gamma - 1$$

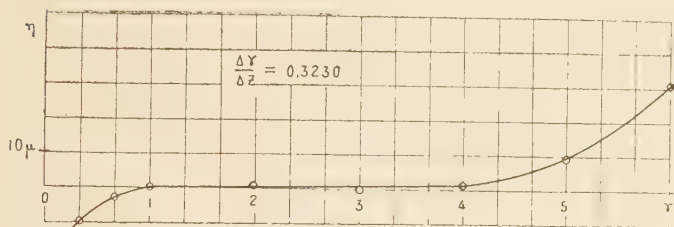


Fig. 15.

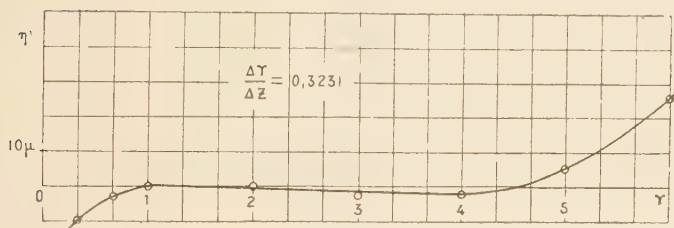


Fig. 16.

Nous obtenons de nouvelles ordonnées η' données dans la dernière colonne du tableau III. La nouvelle courbe représentative (fig. 16) possède une partie rectiligne *descendante*. Le coefficient angulaire de la partie rectiligne de la courbe $\gamma(z)$ est donc compris entre 0,323 et 0,3231.

La comparaison des figures 15 et 16 rend évidente la précision avec laquelle on peut déterminer le coefficient angulaire.

Au chapitre II, en tenant compte du parallélisme imparfait des armatures, nous avons établi l'équation de la courbe $\gamma(z)$.

$$\gamma = \alpha \left[(z - z_1) - \frac{C_0 \varepsilon^2}{\gamma} \right]$$

Cette équation ne s'applique pas à la partie terminale de la courbe, dont nous ferons abstraction.

Les z de l'asymptote :

$$\gamma = z_0 z = z_0^2$$

sont plus petits que les z de la courbe, de quantités égales à $\frac{C_0 \varepsilon^2}{\gamma}$. Les η de l'asymptote sont donc plus *grands* que les η de la courbe de quantités égales à $\frac{C_0 \varepsilon^2}{\gamma}$.

Par suite, on obtiendra sur le graphique en γ et η la transformée de l'asymptote en majorant les η de la courbe de quantités inversement proportionnelles à γ . D'autre part,

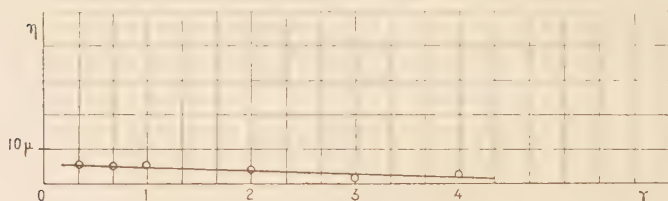


Fig. 17.

cette transformée est certainement une droite. Par conséquent, on doit pouvoir trouver une constante K telle qu'en majorant les η de la courbe de quantités égales à $\frac{K}{\gamma}$ on obtienne une droite.

Après quelques tâtonnements, on trouve effectivement que pour $K = 5,5$ microns, les points obtenus s'alignent, à 1 micron près, sur une droite (fig. 17).

D'où :

$$K = C_0 \varepsilon^2 = 5,5$$

Comme on a environ :

$$C_0 = 10 \text{ cm.} = 100.000 \mu$$

il vient :

$$\varepsilon = 0,0075$$

C'est à peu de chose près la valeur que nous avons choisie au chapitre II. Dans ces conditions, nous savons qu'en calculant C_0 , comme nous l'avons expliqué, à partir du coefficient angulaire de la partie rectiligne de la courbe, on obtient une valeur trop forte de $\frac{1}{2,000}$ environ.

Calcul du coefficient fixe. — On doit calculer le coefficient angulaire $\frac{\Delta\gamma}{\Delta\varepsilon}$ de la partie rectiligne de la courbe $\gamma(z)$ d'après les coordonnées de deux points aussi éloignés que possible. Les deux points expérimentaux les plus éloignés appartenant à la partie rectiligne ont pour coordonnées :

$$z = 4,9945 \text{ et } \gamma = \frac{R_2}{R_1}, \text{ approximativement égal à } 1$$

$$z = 14,361 \text{ et } \gamma = \frac{R_2 + R_3 + R_4 + R_5}{R_1}, \text{ approximativement égal à } 4$$

d'où :

$$\Delta z = 0,3665$$

$$\Delta\gamma = \frac{R_3 + R_4 + R_5}{R_1} = 3 + \frac{r_3 + r_4 + r_5}{R_1} = 3,02565$$

$$\frac{\Delta\gamma}{\Delta\varepsilon} = 0,32304$$

Nous ferons une correction :

Le coefficient angulaire qu'on vient de calculer est légèrement plus grand que le coefficient angulaire de l'asymptote. Exactement, c'est ce dernier qui doit intervenir dans le calcul du coefficient fixe C_0 . A la fin du dernier paragraphe, nous avons vu que la différence relative des deux coefficients angulaires est $\frac{1}{2,000}$.

Cette correction effectuée, nous trouvons un coefficient angulaire égal à :

$$\alpha = 0,3229 \text{ mm.}^{-1} = 3,229 \text{ cm.}^{-1}$$

Le diamètre du plateau isolé a été déterminé à l'aide d'un banc, comportant une lunette et une vis micrométrique, servant à déchiffrer les spectres.

On a trouvé 7,147 cm. pour le diamètre du plateau isolé et 7,200 cm. pour le diamètre de l'évidement de l'anneau de garde. On sait qu'il faut prendre la moyenne des deux diamètres :

$$D = 7,1735 \text{ cm.}$$

ce qui revient à partager la surface du sillon de l'anneau de garde entre l'anneau de garde et le plateau isolé.

Finalement, la valeur du coefficient fixe est :

$$C_0 = \frac{D^2 \alpha}{16} = 10,39 \text{ cm.}$$

Précision du résultat. — Effectuons le calcul d'erreurs :

$$\frac{\delta C_0}{C_0} = \frac{\delta(\Delta)z}{\Delta z} + \frac{\delta(\Delta\gamma)}{\Delta\gamma} + 2 \frac{\delta D}{D}$$

Les z sont déterminés à 1 μ près :

$$\delta(\Delta z) = 2\mu = 0,002 \text{ mm.}$$

$\Delta\gamma$ est calculé par la formule :

$$\Delta\gamma = 3 + \frac{r_3 + r_4 + r_5}{R_1}$$

Les r sont connus à 1 ohm près et l'erreur sur la résistance R_1 (voisin de 15.000 ohms) est négligeable :

$$\delta(\Delta\gamma) = \frac{3}{15.000} = 0,0002$$

D est la moyenne de deux mesures effectuées au $\frac{1}{50}$ mm. :

$$\delta D = 0,002 \text{ cm.}$$

Finalement, l'erreur relative est :

$$-\frac{\delta C_0}{C_0} = \frac{0,002}{9} + \frac{0,0002}{3} + \frac{0,004}{7}$$

Elle est de l'ordre du *millième*.

Deuxième série de mesures. — J'ai effectué une deuxième série de mesures en plaçant le condensateur qui sert de coefficient fixe dans sa position *maximum*. Le tableau IV donne les résultats :

TABLEAU IV

γ	ε	$\frac{\Delta\gamma}{\Sigma\varepsilon}$
1,00785	3,015	0,8859
2,01601	4,163	0,8808
3,02283	5,306	0,8796
4,03350	6,455	0,8800
5,04634	7,606	

Les ordonnées γ de la nouvelle courbe $\gamma(z)$ sont proportionnelles aux ordonnées de la courbe $\gamma(z)$ correspondant à la position *minimum*. Le rapport des ordonnées est égal au rapport des coefficients d'influence du condensateur pour ses deux positions. Les deux courbes ont une partie rectiligne pour le même intervalle d'abscisses. La première série de mesures a montré que les limites de cet intervalle étaient à peu près :

$$z = 5 \quad \text{et} \quad z = 14$$

Le tableau précédent s'accorde avec ce résultat ; les trois dernières mesures se placent sur la partie rectiligne de la

courbe $\gamma(z)$. Nous déterminerons la nouvelle valeur du coefficient fixe en prenant, pour calculer le coefficient angulaire, les points d'abscisses :

$$z = 5,306 \quad \text{et} \quad z = 7,606$$

On trouve :

$$C = 28,29 \text{ cm.}$$

En résumé, les deux coefficients d'influence du condensateur sont :

$$28,29 \text{ cm.} \quad \text{et} \quad 10,39 \text{ cm.}$$

La différence des valeurs extrêmes du coefficient d'influence entre les armatures interne et externe est :

$$28,29 - 10,39 = 17,90 \text{ cm.}$$

Dans l'application de la méthode de mesure absolue des constantes diélectriques, la différence précédente représente la *capacité utile* ($C_2 - C_1$).

Étalonnage du coefficient variable. — Les mesures donnent, à une constante près C_0 , les valeurs du coefficient variable, pour différentes positions du plateau mobile. Quand on a déterminé C_0 , le coefficient variable se trouve donc étalonné pour différentes valeurs de z :

$$C = C_0 + \frac{C_2 - C_1}{\gamma}$$

Pour les autres valeurs de z , on calculera la valeur du coefficient variable par interpolation.

Le tableau V a été calculé d'après la première série de mesures, en partant du tableau II et de la valeur trouvée pour le coefficient fixe :

$$C_0 = 10,39 \text{ cm.}$$

La dernière colonne donne, pour les interpolations, les valeurs de $\frac{1}{C}$. Il vaut mieux, en effet, effectuer une interpolation sur une fonction presque rectiligne, telle que $\frac{1}{C}$, plutôt que de l'effectuer sur une fonction d'allure hyperbolique, telle que C .

TABLEAU V

z	C	$\frac{1}{C}$
2,917	31,16	0,0321
3,942	15,58	0,0642
4,494	10,305	0,0970
8,115	5,152	0,1941
11,233	3,436	0,2910
14,361	2,575	0,3884
17,488	2,058	0,4859
20,505	1,723	0,5804
26,604	1,291	0,7746
29,526	1,149	0,8706

Donnons un exemple d'interpolation. Dans l'étude de l'électromètre, au chapitre III, le coefficient variable a servi de coefficient étalon. Sa position a été fixée à $z = 18$ et, pour cette position nous avons pris :

$$C = 1,991 \text{ cm.}$$

Cette valeur avait été donnée par des mesures préliminaires. Faisons le calcul de C par interpolation des résultats du tableau V. Pour $z = 18$ on trouve :

$$\frac{1}{C} = 0,5019 \quad \text{d'où :} \quad C = 1,992 \text{ cm.}$$

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE I

Influence électrostatique entre deux sphères.

Dans l'Introduction, nous avons vu comment cette seconde partie se rattache à la première. Pour l'étude du coin électrostatique, j'ai imaginé une méthode générale d'approximation qui consiste à assimiler des lignes de force presque rectilignes à des arcs de cercle. C'est l'approximation la plus simple respectant l'orthogonalité des lignes de force et des surfaces conductrices. En fait, nous avons vu que dans le cas du coin électrostatique avec anneau de garde, les lignes de force sont rigoureusement circulaires.

Je me suis adressé à cette même méthode d'approximation pour calculer la plus grande intensité du champ dans le cas de l'influence entre deux sphères et j'ai appliqué la formule obtenue pour essayer d'interpréter les expériences d'Abraham et Villard sur la décharge électrique entre deux sphères égales. Les résultats ayant été encourageants, j'ai repris le calcul en m'adressant cette fois à la méthode par laquelle Lord Kelvin ramène le problème des deux sphères au cas d'une série d'images électriques situées sur la ligne des centres. Par cette voie, les calculs sont plus longs. Ils montrent que l'approximation précédente est bonne tant que la distance des sphères n'est pas trop grande par rapport au rayon.

Naturellement, dans l'exposé des résultats obtenus, il est préférable de suivre un autre ordre. Dans le chapitre I, nous

rappellerons tout d'abord la méthode de Kelvin et nous ferons entrer dans ce chapitre des calculs nouveaux concernant le cas de deux sphères inégales et le cas du système sphère-plan. Dans le chapitre II, nous calculerons le champ maximum, d'une part en appliquant la méthode de Kelvin, d'autre part en assimilant les lignes de force voisines de la ligne des centres à des arcs de cercle. Dans le chapitre III enfin, les formules obtenues serviront à l'étude de la décharge électrique entre sphères.

Sphère soumise à l'influence d'une charge ponctuelle. — Ce problème se ramène au calcul du champ créé par deux charges ponctuelles.

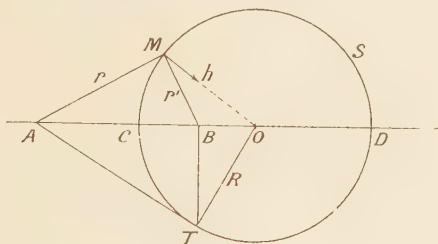


Fig. 18.

Soit deux charges ponctuelles $+q$ et $-q'$, aux points A et B (fig. 18). Le potentiel en un point M, de coordonnées bipolaires r et r' est :

$$v = \frac{q}{r} - \frac{q'}{r'}$$

L'équation de la surface de potentiel nul est :

$$\frac{r}{r'} = \frac{q}{q'} = e^{2k}$$

C'est l'équation d'une sphère S ; si $k > 1$, la sphère renferme le point B.

Puisque la sphère S est une surface équipotentielle, nous pouvons métalliser sa surface sans modifier le champ. La

surface métallique se recouvre intérieurement d'une couche électrique positive et extérieurement d'une couche égale, mais négative. Les deux couches, infiniment voisines, se compensent. Au point M, le champ, normal à la sphère, était et reste égal à h ; la densité électrostatique au point M est donc $-\frac{h}{4\pi}$ pour la couche extérieure et $+\frac{h}{4\pi}$ pour la couche intérieure.

Soit une surface fermée tracée entre les deux couches, dans le métal. A travers une telle surface, le flux est nul. La charge totale de la couche interne est donc $+q'$; la charge totale de la couche externe est $-q'$.

La distribution électrique à l'extérieur de S est indépendante de l'intérieur. Nous pouvons donc neutraliser la couche interne $+q'$ par la charge ponctuelle $-q'$, sans modifier le champ extérieur.

Nous arrivons ainsi au cas d'une sphère S *reliée au sol*, soumise à l'influence d'une charge ponctuelle $+q$, placée en A : le champ, à l'extérieur et à la surface de la sphère, est le même que s'il était créé par la charge ponctuelle $+q$ et par une autre charge ponctuelle $-q'$, placée en B à l'intérieur de la sphère. La charge B est appelée *image électrique* de A par rapport à la sphère ; nous la calculerons au paragraphe suivant.

En résumé, l'image électrique et les charges induites sur la sphère sont équivalentes, en ce qui concerne le champ extérieur à la sphère. Connaissant le champ h à la surface de la sphère, on en déduit la distribution électrostatique ; la densité en chaque point est :

$$\sigma = \frac{h}{4\pi}$$

La charge totale induite sur la sphère est égale à la charge $-q'$ de l'image électrique.

Calcul de l'image électrique. — Si on se donne les charges ponctuelles A et B, on détermine facilement la sphère S, surface de potentiel zéro. Elle coupe la droite AB aux points C et D tels que :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{r}{r'} = \frac{q}{q'} = k$$

Réciproquement, si on se donne la charge ponctuelle A et la sphère conductrice S (centre O, rayon R), on calculera facilement l'image B de la charge A par rapport à S. Comme les points A, B, C, D sont conjugués harmoniquement :

$$OA \times OB = R^2$$

d'où OB. On construira l'image B en menant la tangente AT et en projetant le point de tangence T sur la droite OA.

Le calcul de k donnera la charge q' :

$$k = \frac{AT}{BT} = \frac{CA}{R}$$

Finalement, la position et la charge (en valeur absolue) de l'image électrique B sont données par les formules :

$$OB = \frac{R^2}{OA} \quad q' = q \frac{R}{OA} \quad (1)$$

Méthode de Murphy. — Lord Kelvin ramène le problème de l'influence entre deux sphères au problème de la sphère soumise à l'influence d'une charge ponctuelle, en appliquant la méthode générale de Murphy. Nous rappellerons cette méthode en considérant tout de suite le cas de deux conducteurs sphériques.

Soit S_a et S_b les deux sphères (fig. 19), A et B leurs centres, a et b leurs rayons, U et V leurs potentiels.

La solution générale du problème est immédiate quand on a trouvé deux solutions particulières distinctes. Nous déterminerons la solution particulière correspondant au cas où :

$$U = 1 \quad \text{et} \quad V = 0$$

et on déterminerait de la même façon une seconde solution particulière correspondant au cas où :

$$\bar{U} = 0 \quad \text{et} \quad V = 1$$

Supposons les deux sphères très éloignées, la première au potentiel $\bar{U} = 1$, la seconde en communication avec le sol. La sphère S_a est recouverte uniformément par une couche Q_0 de masse a ; la sphère S_b n'est pas électrisée. Plaçons les deux sphères dans la position voulue. On peut imaginer que le phénomène d'influence se produit par étapes :

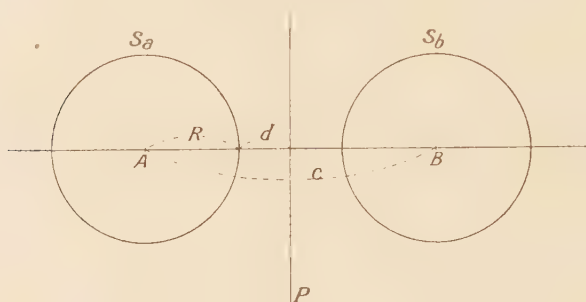


Fig. 19.

1° La distribution Q_0 induit sur la sphère S_b une distribution Q_1 .

2° La distribution Q_1 induit sur la sphère S_a une distribution Q_2

La méthode de Murphy consiste à *construire* la solution d'un problème d'équilibre électrostatique en déterminant une série de distributions *fictives* telles que leur superposition donne un potentiel constant sur chaque conducteur :

Distribution I. — Sur la sphère S_a , on fixe une couche uniforme de masse a . On suppose qu'il n'y a pas d'électricité sur la sphère S_b . En chaque point de S_a , le potentiel est égal à 1. Sur S_b , le potentiel est quelconque ; il n'est pas le même en chaque point.

Distribution II. — Sur la sphère S_a , on fixe la distribu-

tion Q_0 . La sphère S_b , qu'on relie au sol, prend, sous l'influence de Q_0 , la distribution Q_1 . En chaque point de S_b , le potentiel est nul. Sur S_a , le potentiel est quelconque.

Distribution III. — Sur la sphère S_b , on fixe la distribution Q_1 . La sphère S_a , reliée au sol, prend, par influence, la distribution Q_2 . En chaque point de S_a , le potentiel est nul. Sur S_b , le potentiel est quelconque.....

On peut établir le tableau suivant, où les distributions entre parenthèses représentent des distributions *fixées* :

	Distributions		U	V
	Sur S_a	Sur S_b		
I.	(Q_0)	(0)	1	quelconque
II.	(Q_0)	$\rightarrow Q_1$	quelconque	0
III.	$\leftarrow Q_2$	(Q_1)	0	quelconque
IV.	(Q_2)	$\rightarrow Q_3$	quelconque	0

Superposons sur S_a les distributions $Q_0, Q_2, \dots$ et sur S_b les distributions $Q_1, Q_3, \dots$. Ceci peut s'effectuer de deux manières :

1° En superposant les distributions I, III, ... : en chaque point de S_a , le potentiel est donc égal à 1.

2° Ou bien en superposant les distributions II, IV, ... : en chaque point de S_b , le potentiel est donc nul.

Sur S_a , le potentiel est constant, sur S_b le potentiel est constant. Il y a donc équilibre électrostatique. Sur S_a le potentiel est égal à 1, Sur S_b le potentiel est nul. Nous avons construit *une* solution, c'est-à-dire la solution du cas particulier envisagé ($U = 1, V = 0$), puisque, la forme et les potentiels des conducteurs étant donnés, il n'y a qu'une solution.

Résultats de Lord Kelvin. — Par la méthode des images électriques, on calcule facilement les distributions Q_1 , Q_2 , Q_3 , ... dont la superposition donne les distributions d'équilibre Q_a et Q_b sur les sphères S_a et S_b .

En ce qui concerne le champ à l'extérieur des sphères, les distributions Q_0 , Q_1 , Q_2 , ... sont équivalentes à des images électriques :

1° La couche uniforme Q_0 est équivalente à la charge ponctuelle de masse a , placée au centre A (la charge A est l'image électrique par rapport à S_a d'une charge à l'infini).

2° Q_1 est la distribution prise par la sphère S_b reliée au

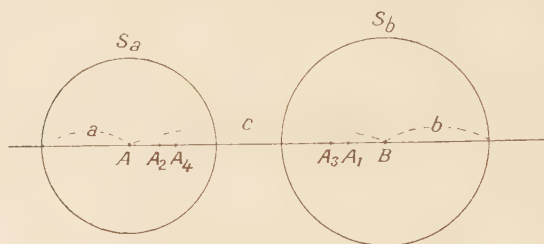


Fig. 20.

sol sous l'influence de la distribution Q_0 ou de la charge ponctuelle A. La distribution Q_1 est donc équivalente à l'image A_1 de A par rapport à S_b .

3° Q_2 est la distribution prise par la sphère S_a reliée au sol sous l'influence de la distribution Q_1 ou de l'image A_1 . La distribution Q_2 est donc équivalente à l'image A_2 de A_1 , par rapport à S_a .

.....

Les distributions Q_a et Q_b sont donc équivalentes à une série d'images électriques que l'on peut calculer de proche en proche en appliquant les formules (1). Autrement dit, à l'extérieur des sphères, le champ est le même que celui qui serait créé par une série de charges :

$$+ q_0 \quad - q_1 \quad + q_2 \quad - q_3 \quad + q_4 \quad \dots$$

placées sur la ligne des centres aux points :

$$A \quad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad \dots$$

Les charges à indice pair $A, A_2, A_4, \dots$, intérieures à la sphère S_a , sont positives. On notera leurs positions par leurs distances $x_0, x_2, x_4, \dots$, au centre B de l'autre sphère.

Les charges à indice impair $A_1, A_3, \dots$, intérieures à la sphère S_b , sont négatives. On notera leurs positions par leurs distances au centre A de l'autre sphère.

Rappelons qu'il s'agit du cas où les potentiels des deux sphères sont $u = 1$ et $v = 0$. Les formules (1) donnent, en appelant c la distance AB des centres des sphères :

$$\begin{aligned} x_0 &= c & q_0 &= a \\ x_1 &= c - \frac{b^2}{x_0} & q_1 &= b \frac{q_0}{x_0} \\ x_2 &= c - \frac{a^2}{x_1} & q_2 &= a \frac{q_1}{x_1} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Le flux à travers chaque sphère est le même, qu'on le considère émis par la sphère elle-même ou par les images électriques équivalentes qu'elle renferme, d'où les expressions suivantes des charges des deux sphères :

$$\begin{aligned} q_a &= q_0 + q_2 + q_4 + \dots \\ q_b &= -q_1 - q_3 - q_5 - \dots \end{aligned}$$

D'autre part, appelons C_a la capacité de la sphère S_a et $-C_{ab}$ le coefficient d'influence entre les deux sphères :

$$q_a = C_a \quad q_b = -C_{ab}$$

La comparaison des expressions précédentes donne :

$$\begin{aligned} C_a &= q_0 + q_2 + q_4 + \dots \\ C_{ab} &= q_1 + q_3 + q_5 + \dots \end{aligned}$$

En résumé, nous calculerons C_a et C_{ab} par les formules :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} c_a = q_0 + q_2 + \dots & C_{ab} = q_1 + q_3 + \dots \\ q_n = a \frac{q_{n-1}}{x_{n-1}} & x_n = c - \frac{a^2}{x_{n-1}} \text{ pour } n \text{ pair} \\ q_n = b \frac{q_{n-1}}{x_{n-1}} & x_n = c - \frac{b^2}{x_{n-1}} \text{ pour } n \text{ impair} \\ q_0 = a & x_0 = c \end{array} \right.$$

Influence entre deux sphères égales. — Si l'on pose $a = b = R$, les formules (2) deviennent :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} C_a = q_0 + q_2 + \dots & C_{ab} = q_1 + q_3 + \dots \\ q_{n+1} = R \frac{q_n}{x_n} & x_{n+1} = c - \frac{R^2}{x_n} \\ q_0 = R & x_0 = c \end{array} \right.$$

Si on définit la distance des centres par la variable réduite $\gamma = \frac{c}{R}$, on peut écrire :

$$C_a = RI(\gamma) \quad C_{ab} = RJ(\gamma) \quad (4)$$

Les fonctions $I(\gamma)$ et $J(\gamma)$ représentent la capacité d'une sphère et le coefficient d'influence (en valeur absolue) dans le cas de deux sphères de rayon unité dont les centres sont distants de γ .

Calculons la force d'attraction X , entre deux sphères égales ; c étant la distance des centres et W l'énergie électrostatique :

$$X = - \frac{\partial W}{\partial c}$$

nous mettons le signe +, car nous calculerons la dérivée à potentiels constants.

Nous ne considérerons que le cas particulier où les poten-

tiels U et V des sphères sont opposés. Les charges des sphères sont :

$$\begin{aligned} A &= C_a U - C_{ab} V = RIU + RJU \\ B &= -A \end{aligned}$$

L'énergie du système est :

$$W = \frac{1}{2} (AU + BV) = AU = RU^2(I + J)$$

et, par conséquent, la force d'attraction est :

$$X = U^2 \left(\frac{\partial I}{\partial \gamma} + \frac{\partial J}{\partial \gamma} \right)$$

Lord Kelvin a calculé, pour certaines valeurs de γ , les quantités :

$$i = \frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial \gamma} \quad j = \frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial \gamma}$$

d'où :

$$X = 2U^2(i + j)$$

Si $U = 1$ U. E. S. = 300 volts, la force d'attraction en dynes est :

$$X = 2(i + j)$$

Influence entre deux sphères inégales. — Dans le cas général où les sphères sont inégales, ce sont les formules (2) qui s'appliquent. Ce cas peut se ramener assez complètement au cas plus simple où les sphères sont égales.

L'expression de la capacité C_a fait intervenir les images à indice pair :

$$C_a = q_0 + q_2 + \dots$$

On peut se proposer de passer directement de q à $q + 2$ (n pair). On est conduit à poser :

$$\begin{aligned} C_n &= c^2 = a^2 + b^2 & R &= ab \\ m &= \frac{n}{2} & Q_m &= q_n & X_m &= c r_n = b^2 \end{aligned}$$

et le calcul de C_a prend la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_a = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots \\ Q_{m+1} = R \frac{Q_m}{X_m} \quad X_{m+1} = C - \frac{R^2}{X_m} \\ Q_0 = a \quad X_0 = c^2 - b^2 \end{array} \right.$$

Ces équations ressemblent aux équations (3) correspondant au cas de deux sphères égales. On n'a pas $Q_0 = R$ ni $X_0 = C$, mais les équations permettant de passer d'un indice à l'indice suivant sont identiques. Sauf au point de départ, les calculs seront donc les mêmes.

L'expression du coefficient d'influence C_{ab} fait intervenir les images à indice impair :

$$C_b = q_1 + q_3 + \dots$$

En opérant comme pour le calcul de C_a , on est conduit à poser :

$$\begin{aligned} C &= c^2 - a^2 - b^2 & R &= ab \\ m = \frac{n-1}{2} & \quad Q_m = q_n & X_m &= cx_n - a^2 \end{aligned}$$

et le calcul de C_{ab} prend la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{ab} = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots \\ Q_{m+1} = R \frac{Q_m}{X_m} \quad X_{m+1} = C - \frac{R^2}{X_m} \\ Q_0 = \frac{R}{c} \quad X_0 = C \end{array} \right.$$

Le problème se ramène complètement au cas de deux sphères égales. Les équations précédentes ne diffèrent des équations (3) qu'en un point : on a $Q_0 = \frac{R}{c}$ au lieu de $Q_0 = R$. On peut énoncer le résultat suivant, déjà obtenu,

par une autre voie et sous une autre forme, par MM. Guillet et Aubert ⁽¹⁾ :

Le coefficient d'influence de deux sphères de rayons a et b , dont les centres sont distants de c est égal, au facteur $\frac{1}{c}$ près, à la somme du coefficient d'influence (plus exactement de la valeur absolue de ce coefficient) et de la capacité d'une sphère, dans le cas de deux sphères égales de rayon $R = ab$, dont les centres sont distants de $C = c^2 - a^2 - b^2$.

Influence entre une sphère et un plan. — On peut considérer ce problème comme un cas particulier du problème des deux sphères inégales. La sphère est de rayon $a = R$ et le plan est assimilable à une sphère de rayon $b = \infty$. La distance des centres des deux sphères est :

$$c = a + b + d$$

en appelant d la distance de la surface de la sphère au plan (fig. 21) ; a et d sont négligeables par rapport à b ou à c .

En appliquant la méthode de transformation du paragraphe précédent, on se trouve ramené complètement au cas de deux sphères égales. Voici les résultats :

$$\begin{cases} C_{ab} = R[I(\gamma) + J(\gamma)] & \text{avec } \gamma = 2 + \frac{2d}{R} \\ C_a = C_{ab} \\ C_b = b + C_{ab} \end{cases}$$

Rappelons que $I(\gamma)$ et $J(\gamma)$ représentent la capacité d'une sphère et le coefficient d'influence dans le cas de deux sphères de rayon unité dont les centres sont distants de γ .

Considérons particulièrement la formule qui donne la

(1) *Journal de Physique*, tome 3, 1913, p. 724.

capacité C_b du plan, b est infiniment grand, mais peut être considéré comme une constante ; le second terme de C_b représente *l'accroissement de capacité du plan dû à la présence de la sphère*.

Les expressions précédentes permettent de calculer la force d'attraction entre la sphère et le plan, mais nous allons ramener le problème sphère-plan au problème des sphères égales par des considérations moins abstraites.

Nous croyons utile de nous attarder sur la liaison qui existe entre les deux problèmes, car, comme l'ont signalé MM. Guillet et Aubert, « Si Poisson, Kelvin, Maxwell et d'autres physiciens illustres, se sont appliqués à l'étude du système formé par deux sphères électrisées, on ne trouve pas trace dans leurs travaux de la combinaison électrométrique plan-sphère ». Dans ces conditions, MM. Guillet et Aubert, désirant établir un électromètre absolu fondé sur l'action mutuelle d'un conducteur sphérique et d'un conducteur plan, ont étudié directement le problème plan-sphère ⁽¹⁾. Nous comparerons leurs résultats numériques à ceux que l'on peut obtenir en utilisant les tables données par Lord Kelvin pour le cas de deux sphères égales.

Force d'attraction. — La sphère S_a est au potentiel $+U$ et le plan P au potentiel $V = 0$ (fig. 21). Prenons la sphère S_b , symétrique de la sphère S_a par rapport au plan et supposons cette sphère S_b au potentiel $-U$.

Dans le cas de l'influence entre les sphères S_a et S_b , le plan P est justement la surface équipotentielle zéro. Par conséquent, dans le cas de l'influence entre la sphère S_a et le plan P, le champ à gauche de P est le même que dans le cas précédent. En particulier, la distribution électrostatique sur la sphère S_a et le champ appliqué à chaque charge élémentaire portée par S_a sont les mêmes : *la force d'attraction est la même*.

⁽¹⁾ *Journal de Physique*, tome 2, 1912, p. 990.

Or, la force d'attraction entre deux sphères égales portées à des potentiels opposés est donnée par la formule (5) :

$$X = 2U^2(i + j)$$

les fonctions i et j correspondant à la valeur :

$$\gamma = \frac{c}{R} = 2 + \frac{2d}{R}$$

de la variable.

Capacité de la sphère. — Dans le cas de l'influence entre S_a et P, la charge de S_a est donnée puisque $V = 0$, par :

$$Q_a = CU$$

C étant la capacité de la sphère S_a dans ce cas.

Dans le cas de l'influence entre S_a et S_b , la charge de la sphère S_a est la même et elle est donnée par :

$$Q_a = C_a U - C_{ab} \times (-U) = (C_a + C_{ab})U$$

C_a et C_{ab} étant, dans cet autre cas, la capacité de la sphère S_a et la valeur absolue du coefficient d'influence entre S_a et S_b .

La comparaison des deux cas donne, en vertu des formules (4) :

$$C = C_a + C_{ab} = R[I(\gamma) + J(\gamma)] \quad (7)$$

Comparaison avec les résultats de Guillet et Aubert. — MM. Guillet et Aubert ont étudié directement le problème sphère-plan et ils ont calculé un tableau numérique donnant la capacité C de la sphère et la force d'attraction f_1 , pour une différence de potentiel unité et un rayon unité, en fonction de la variable u , u , R étant la distance entre le centre de la sphère et le plan.

Les deux paragraphes précédents montrent comment le problème sphère-plan se ramène au problème des deux sphères égales. Les formules (6) et (7) donnent :

$$\begin{aligned} C &= I + J \\ f_1 &= 2(i + j) \end{aligned}$$

I et J, i et j , sont fonctions de la variable :

$$\gamma = 2 + \frac{2d}{R} = 2u$$

Lord Kelvin a donné une table de ces fonctions ⁽¹⁾ et les formules précédentes permettent de profiter immédiatement des calculs de Lord Kelvin dans le cas sphère-plan.

A titre d'exemple, effectuons une comparaison numérique. Pour $u = 2$, Guillet et Aubert donnent :

$$C = 1,3410 \qquad f_1 = 0,1206$$

La valeur correspondante de γ est 4, pour laquelle Lord Kelvin donne :

$$I = 1,07182 \qquad i = 0,02075$$

$$J = 0,26924 \qquad j = 0,03958$$

d'où :

$$C = 1,34106 \qquad f_1 = 0,12066$$

⁽¹⁾ *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism*, p. 96. Dans la table de Lord Kelvin, les grandeurs I, J, i et j sont notées I, J, A et B.

CHAPITRE II

· Calcul du champ maximum.

Potentiels symétriques. — Nous appelons *champ maximum* la valeur du champ là où il est le plus intense. Dans le cas symétrique où les potentiels u et v des deux sphères sont opposés :

$$v = -u$$

le champ prend sa plus grande intensité aux pôles en regard C et D des deux sphères (fig. 22). Nous calculerons le champ maximum dans ce cas, en vue d'applications à la décharge électrique entre sphères.

1° Le rayon des sphères est égal à l'unité, leurs centres sont à la distance c ; les potentiels sont $u = +1$ et $v = -1$ (fig. III). La distribution électrostatique s'obtient en superposant les distributions définies par les figures I et II. Le cas I a été étudié au chapitre précédent et la distribution II se déduit immédiatement de la distribution I. Nous voulons calculer le champ maximum h . La superposition des figures I et II montre que :

$$h = h' + h''$$

2° Il faut maintenant passer au cas général (fig. IV) : les sphères égales sont de rayon R (diamètre D), leurs centres sont à la distance cR , la différence de potentiel entre les sphères est égale à V . Les potentiels des sphères sont symétriques :

$$u = +\frac{V}{2} \qquad v = -\frac{V}{2}$$

On passe de la distribution III à la distribution IV en multipliant les longueurs par R et les potentiels par $\frac{V}{2}$, donc en multipliant les valeurs des champs par :

$$\frac{V}{2} = \frac{V}{D}$$

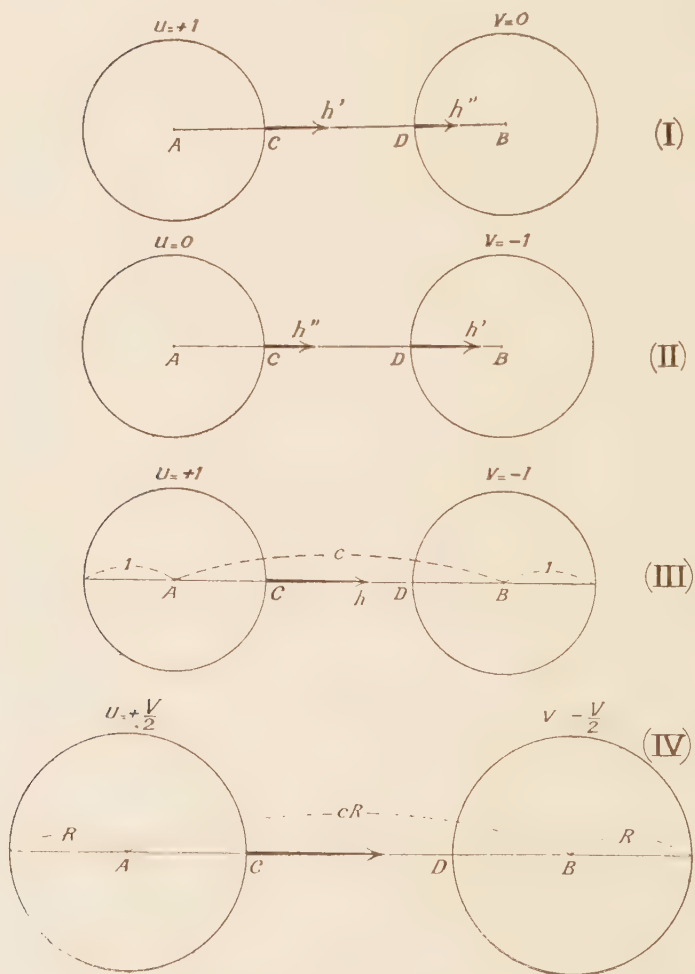


Fig. 21.

Le champ en chaque point est donné en effet par la relation classique :

$$h = - \frac{dV}{dn}$$

En résumé, nous continuerons à étudier la distribution I et nous calculerons la somme h des champs h' et h'' aux points C et D (fig. 21. I). Dans le cas général IV, le champ maximum est égal, au facteur $\frac{V}{D}$ près, à la somme h .

Calcul du champ maximum. — Revenons donc au cas I. Nous savons que les surfaces sphériques électrisées sont

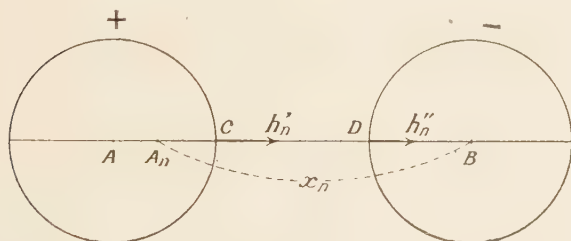


Fig. 22

équivalentes à une série d'images électriques $A, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ dont les charges $\pm q_n$ et les abscisses x_n sont données par les formules (3) du chapitre précédent.

Calculons les champs h'_n et h''_n aux pôles C et D, dus à l'image A_n (fig. 22). Si cette image est intérieure à la sphère A, elle est positive, et les champs h'_n et h''_n sont dirigés vers la droite. Si l'image est intérieure à la sphère B, sa charge est négative et les champs h'_n et h''_n sont encore dirigés vers la droite. Dans ces conditions, nous n'avons pas à nous préoccuper des questions de signe.

Supposons l'image A_n à l'intérieur de la sphère A et appliquons la loi de Coulomb :

$$\begin{aligned} h'_n &= \frac{q_n}{(CA_n)^2} = \frac{q_n}{(x_n - (c - 1))^2} = \frac{q_n}{(x'_n - c + 1)^2} \\ h''_n &= \frac{q_n}{(DA_n)^2} = \frac{q_n}{(x_n - 1)^2} \\ h_n &= h'_n + h''_n = q_n \left[\frac{1}{(x_n - 1)^2} + \frac{1}{(x'_n - c + 1)^2} \right] \end{aligned}$$

Si l'image A_n est à l'intérieur de la sphère B, h'_n et h''_n échangent leurs expressions, mais l'expression de h_n n'est pas changée.

En résumé, la somme $h = h' + h''$ se calculera en appliquant les formules suivantes :

$$\text{I. } \left\{ \begin{array}{l} h = \Sigma h_n = \Sigma q_n \left[\frac{1}{(x_n - 1)^2} + \frac{1}{(x'_n - c + 1)^2} \right] \\ x_{n+1} = c - \frac{1}{x_n} \quad q_{n+1} = \frac{q_n}{x_n} \\ x_0 = c \quad q_0 = 1 \end{array} \right.$$

Positions limites des images électriques. — Les images successives, images du centre A par rapport aux deux sphères, tendent vers les positions limites α et β (fig. 24) d'abscisses :

$$\alpha B = \beta A = l$$

Pour le calcul de l , nous nous reporterons encore aux formules (3) du chapitre I ; on a la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = c - \frac{1}{x_n}$$

La distance l est donc donnée par la suite :

$$c = \frac{1}{c - \frac{1}{c - \frac{1}{c - \dots \frac{1}{c}}}}$$

Puisque, d'après la nature du problème, cette suite est convergente, on a, pour n infini :

$$x_n = x_{n+1} = l$$

En appliquant la relation de récurrence, on obtient l'équation :

$$l = c - \frac{1}{l}$$

d'où :

$$l = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4}}{2}$$

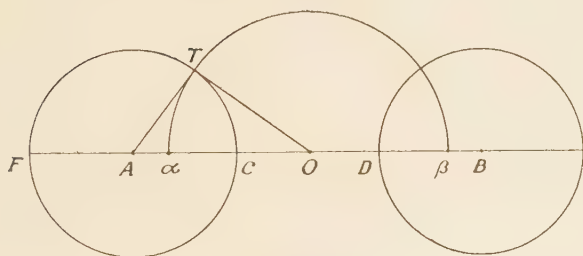


Fig. 23.

Ces deux valeurs sont seulement des valeurs *possibles* pour la limite : le signe $-$ ne convient pas, car on doit avoir $l = \alpha B > c - 1$; finalement :

$$l = \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - 1} \quad (2)$$

Construction géométrique. — Du milieu O de AB , on mène une tangente OT à la circonférence de centre A , par exemple. La circonférence de centre O et de rayon OT coupe la ligne des centres en α et β . On vérifie cette construction en remarquant que le rayon $AT = 1$ (fig. 23).

Simplification du calcul. — Appliquons les formules (1). Nous calculerons rigoureusement, de proche en proche, les

premiers termes du champ h et nous arrêterons le calcul au terme h_n correspondant à l'image A_n . Pour les termes suivants, nous ferons une approximation : nous appliquerons les formules (1) comme si les abscisses des images d'indice supérieur à n étaient égales à la valeur limite l . En fait, ces abscisses sont comprises entre x_n et l .

Les termes d'indice supérieur à n donnent un *terme complémentaire* :

$$\Delta_n = \left[\frac{1}{(l-1)^2} + \frac{1}{(l-c+1)^2} \right] (q_{n+1} + q_{n+2} + \dots)$$

Ce terme complémentaire est d'ailleurs trop grand, puisque nous prenons pour chaque abscisse x_{n+1} , x_{n+2} , ..., une valeur trop petite l et pour les charges des valeurs trop grandes :

$$q_{n+1} = \frac{q_n}{l} \quad q_{n+2} = \frac{q_{n+1}}{l} \dots$$

Ces valeurs décroissent en progression géométrique ; leur somme est :

$$q_n \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l^2} + \dots \right) = \frac{q_n}{l-1}$$

Par conséquent :

$$\Delta_n = \frac{q_n}{l-1} \left[\frac{1}{(l-1)^2} + \frac{1}{(l-c+1)^2} \right] \quad (3)$$

En choisissant pour valeur commune des abscisses la valeur trop grande x_n , on obtient au contraire un terme complémentaire trop petit :

$$\Delta_n = \frac{q_n}{x_n-1} \left[\frac{1}{(x_n-1)^2} + \frac{1}{(x_n-c+1)^2} \right] \quad (4)$$

La différence :

$$\delta_n = \Delta_n - \Delta_n$$

donne une valeur supérieure de l'erreur que l'on commet

en arrêtant le calcul rigoureux au terme h_n et en remplaçant les termes suivants par le terme complémentaire.

Comme la différence entre (3) et (4) provient surtout de la différence $\delta[\]$ des valeurs du crochet, l'ordre de grandeur de l'erreur est donné par :

$$\delta_n = \frac{\delta[\]}{[\]} \Delta_n \quad (5)$$

Calcul du terme complémentaire. — Le calcul du crochet de la formule (4) est facile par la géométrie (voir fig. 24) :

$$[\] = \frac{1}{(Cx)^2} + \frac{1}{(Dx)^2}$$

Posons $OC = m$ et $OF = n$:

$$[\] = \frac{1}{(n-m)^2} + \frac{1}{(n+m)^2} = \frac{2(m^2 + n^2)}{(n^2 - m^2)^2}$$

On a la relation géométrique :

$$\overline{OT^2} = OC \times OF \quad \text{ou} \quad n^2 = m(m+2)$$

d'où :

$$[\] = 2 \frac{2m^2 + 2m}{4m^2} = \frac{2m+2}{2m} = \frac{c}{c-2}$$

Finalement, le terme complémentaire prend la forme simple :

$$\Delta_n = \frac{c}{c-2} \frac{q_n}{l-1} \quad (6)$$

Application numérique. — Prenons le cas où l'écartement des sphères est égal à leur rayon : $c = 3$.

La formule (2) donne $l = 2,618$.

La formule (6) donne $\Delta_n = 1,855 \ q_n$.

Appliquons les formules (1) :

$$\begin{array}{llll}
 x_0 = 3 & q_0 = 1 & []_0 = 1,25 & h_0 = 1,25 \\
 x_1 = 2,667 & q_1 = 0,333 & []_1 = 2,61 & h_1 = 0,87 \\
 x_2 = 2,625 & q_2 = 0,125 & []_2 = 2,94 & h_2 = 0,3675 \\
 & & & \Delta_2 = 0,232 \\
 & & & \hline
 & & & h = 2,7195
 \end{array}$$

x tend vers $l = 2,618$ et le crochet vers $\frac{c}{c-2} = 3$.

Nous avons arrêté le calcul rigoureux au terme d'indice 2.
Une valeur supérieure de l'erreur est :

$$\frac{\delta_n}{\Delta_n} = \frac{x_n - l}{l - 1} + \frac{\delta_n}{c} = \frac{0,007}{1,618} + \frac{0,06}{3}$$

Le premier terme peut être négligé, comme nous l'avons fait dans la formule (5) :

$$\delta_n = 0,02 \times 0,232 = 0,005$$

Nous avons donc :

$$h = 2,72 \quad \text{à} \quad \frac{1}{500} \text{ près.}$$

Formules approchées. — Dans le calcul des capacités, du coefficient d'influence et de la force d'attraction, Mascart ⁽¹⁾ tient compte rigoureusement des images A et A₁, puis il suppose que les abscisses des images suivantes sont égales à x₁. Dans le calcul du champ maximum, une approximation équivalente consiste à tenir compte rigoureusement des images A et A₁, puis à ajouter le terme complémentaire Δ'₁.

(1) *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*, 2^e édition, tome I, p. 177.

C'est ce que nous allons faire en appliquant les formules (1) et (4) :

$$\begin{aligned} x_0 &= c & q_0 &= 1 & h_0 &= \frac{1}{(c-1)^2} + 1 \\ x_1 &= \frac{c^2-1}{c} & q_1 &= \frac{1}{c} & h_1 &= \frac{c}{(c^2-c-1)} + \frac{c}{(c-1)^2} \\ \Delta'_1 &= \frac{c^2}{(c^2-c-1)} \left[\frac{1}{(c^2-c-1)^2} + \frac{1}{(c-1)^2} \right] \\ h &= h_0 + h_1 + \Delta'_1 \end{aligned} \quad (7)$$

Nous obtenons ainsi une valeur trop petite. On obtient au contraire une valeur trop grande par la formule :

$$h = h_0 + h_1 + \Delta_1$$

Le terme complémentaire est donné par la formule (6) :

$$\Delta_1 = \frac{c}{c-2} \frac{1}{c} \frac{1}{l-1} = \frac{1}{(c-2)(l-1)}$$

d'où :

$$h = 1 + \frac{c+1}{(c-1)^2} + \frac{c}{(c^2-c-1)^2} + \frac{1}{(c-2)(l-1)} \quad (8)$$

Autre méthode d'approximation. — Les approximations précédentes, qui conduisent aux formules (7) et (8) ne sont bonnes que si l'écartement des sphères est déjà assez grand et, d'un autre côté, l'application des formules rigoureuses (1) est très longue quand l'écartement devient petit.

Pourtant, pour de très faibles écartements, le champ maximum est simplement égal, avec une bonne approximation, au champ moyen, c'est-à-dire à $\frac{V}{d}$, en appelant V la différence de potentiel et d la distance des surfaces des sphères.

Pour des écartements petits, nous essaierons l'approximation suivante : Nous supposerons que les lignes de force voisines de la ligne des centres se confondent avec des arcs

de cercle coupant orthogonalement les deux sphères. C'est une approximation raisonnable : on obtient des lignes de force émises et absorbées *correctement* et il est évident qu'elles ne doivent pas s'écarter beaucoup des lignes de force réelles.

Dans tous les cas où les lignes de force réelles sont presque rectilignes, on pourra les remplacer par des lignes de force circulaires. J'ai essayé pour la première fois cette méthode générale d'approximation dans l'étude du coin électrostatique et, dans ce cas, j'ai pu démontrer, ultérieurement, que les lignes de force sont rigoureusement circulaires.

Dans le cas présent, admettre des lignes de force circulaires, c'est se donner une loi particulière pour la valeur du champ le long de la ligne des centres ; il n'y a aucune raison pour que cette loi particulière soit rigoureuse.

Application. — Nous considérerons un tube de force infiniment étroit de révolution autour de la ligne des centres (fig. 24). La surface qui limite ce tube de force est engendrée par la rotation de la ligne de force MNP autour de AB. Cette ligne de force est définie par l'angle infiniment petit α . Son rayon, infiniment grand, est :

$$\rho = \Omega N = \frac{\text{arc MP}}{2\alpha} = \frac{CD}{2\alpha} = \frac{m}{\alpha}$$

avec une erreur relative du second ordre par rapport à α .

Nous employons les notations suivantes :

$$CD = d = 2m \quad AC = BD = R = \frac{D}{2}$$

Pour calculer le champ sur CD, nous écrirons que le flux est conservatif. Au point D, d'abscisse m , le flux est :

$$\pi y_1^2 \times h_1$$

en appelant h_1 le champ en D et $y_1 = R\alpha$ l'ordonnée de P.
 Au point R d'abscisse x , le flux est :

$$\pi y^2 \propto h$$

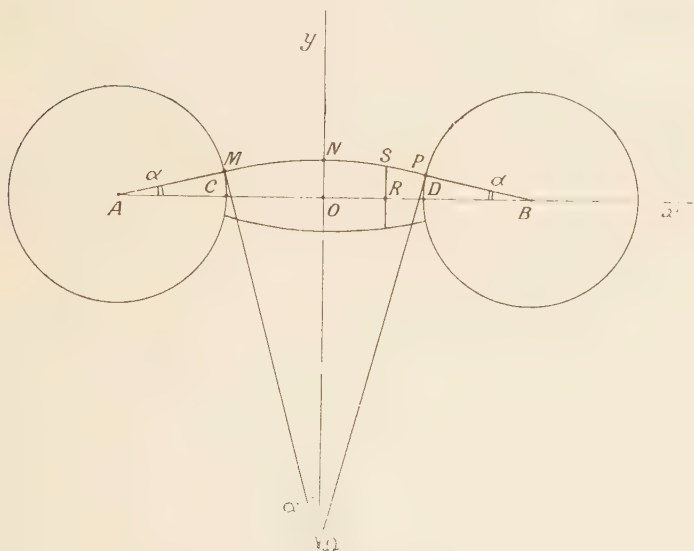


Fig. 24.

en appelant h le champ en R et y l'ordonnée de S :

Le flux est conservatif :

$$hy^2 = h_1 y_1^2 = h_1 R^2 \alpha^2$$

Calculons y (fig. 25). Posons $ON = y_0$ et $NS' = u$:

$$\begin{aligned} y &= y_0 - u \\ x^2 &= u(2\rho - u) = 2\rho u \\ y &= y_0 - \frac{x^2}{2\rho} \end{aligned}$$

C'est l'équation de la ligne de force.

On détermine y_0 en appliquant cette équation au point P
 $(x_1 = m, y_1 = R\alpha)$:

$$R\alpha = y_0 - \frac{m^2}{2\rho}$$

Finalement :

$$y = R\alpha + \frac{m^2 - x^2}{2\rho} = \left(R + \frac{m^2 - x^2}{2m} \right) \alpha$$

$$h = \frac{h_1 R^2 \alpha^2}{y^2} = h_1 \frac{R^2}{\left(R + \frac{m^2 - x^2}{2m} \right)^2} = \frac{h_1}{\left(1 + \frac{m^2 - x^2}{2mR} \right)^2}$$

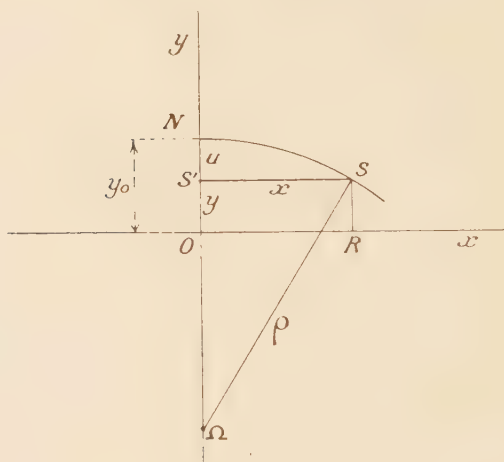


Fig. 25.

Le champ moyen entre C et D est :

$$H = \frac{1}{m} \int_0^m h dx = h_1 \int_0^m \frac{dx}{m \left(1 + \frac{m^2 - x^2}{2mR} \right)^2}$$

Pour obtenir le champ maximum h_1 en fonction du champ moyen H , il faut donc calculer l'intégrale :

$$\frac{H}{h_1} = 1 = \int_0^m \frac{dx}{m \left(1 + \frac{m^2 - x^2}{2mR} \right)^2}$$

Pour simplifier cette intégrale, introduisons la variable sans dimensions $v = \frac{x}{m}$:

$$I = \int_0^1 \frac{dv}{\left(1 + \frac{1-v^2}{\frac{2R}{m}}\right)^2} = \int_0^1 \frac{dv}{(1 + a - av^2)^2}$$

Nous posons : $a = \frac{m}{2R} = \frac{d}{2D}$.

L'intégrale prend une forme classique si on choisit la nouvelle variable :

$$z = \sqrt{\frac{a}{1+a}} y$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{1+a} (1+a)^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{(1-z^2)^2}$$

avec :

$$Z = \sqrt{\frac{a}{1+a}}$$

On décompose la fonction à intégrer en une somme de fractions plus simples et, après des transformations algébriques, on trouve :

$$\frac{h_1}{H} = F(a) = -\frac{2(1+a)}{1 + \frac{\text{Log}(\sqrt{1+a} + \sqrt{a})}{\sqrt{a}\sqrt{1+a}}}$$

Les formules que nous avons établies à partir de la méthode de Kelvin donnent le champ maximum au facteur $\frac{V}{D}$ près. Nous transformerons la formule précédente de façon à faire apparaître ce facteur ; le champ maximum est :

$$h = h_1 = HF(a) = \frac{V}{d} F(a) = \frac{V}{D} \frac{F(a)}{2a}$$

Développement en série. — Quand nous comparerons la formule (9) aux résultats donnés par la méthode de Lord

Kelvin, nous verrons que cette formule est bonne quand l'écartement n'est pas trop grand. Il est donc utile de développer cette formule en série par rapport à a .

Posons $\sqrt{a} = \varepsilon$

$$\frac{h_1}{H} = \frac{2(1 + \varepsilon^2) \varepsilon \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon \sqrt{1 + \varepsilon^2} + \text{Log}(\varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2})}$$

Les développements suivants sont classiques :

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \varepsilon^2} &= 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^4}{8} \\ \text{Log}(\varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2}) &= \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{6} + \frac{3\varepsilon^5}{40} \end{aligned}$$

On trouve, par multiplications et divisions :

$$\frac{h_1}{H} = 1 + \frac{4a}{3} + \frac{8a^2}{45} + \dots$$

Remplaçons maintenant le paramètre a et le champ moyen H par leurs valeurs ; nous ne retiendrons que les trois premiers termes du développement :

$$h = h_1 = \frac{V}{d} \left(1 + \frac{d}{3R} + \frac{a^2}{90R^2} \right)$$

Enfin, posons $d_1 = \frac{d}{R}$:

$$h = \frac{V}{R} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{3} + \frac{d_1}{90} \right) \quad (10)$$

Comparaison numérique des différentes formules. — Nous avons étudié le cas de deux sphères égales portées à des potentiels opposés ; R est le rayon des sphères, D leur diamètre, cR la distance de leurs centres, $d = d_1 \cdot R$ la distance des surfaces sphériques, V la différence de potentiel. Les différentes formules donnent le champ maximum h en fonction de c , du paramètre $a = \frac{d}{4R}$ ou de d_1 . Pour comparer

numériquement les formules, nous choisirons la variable d_1 :

$$c = d_1 - 2 \quad a = \frac{d_1}{4}$$

Rappelons que les formules établies à partir de la méthode de Kelvin donnent le champ maximum dans le cas particulier où $V = 2$ et $R = 1$, c'est-à-dire, dans le cas général, au facteur $\frac{V}{D}$ près.

Le tableau donne le champ maximum h en fonction de d , au facteur $\frac{V}{D}$ près ; ou, si l'on veut, il donne le champ maximum en fonction de la distance des sphères, dans le cas où $V = 2$ et $R = 1$.

d	K	M	M'	C	S
0,2	10,66				10,687
0,4	5,68	4,85	6,07	5,68	1,675
0,8	3,205	3,06	3,22	3,19	3,185
1	2,72	2,64	2,73	2,69	2,689
2	1,77	1,76	1,77	1,706	
2,8	1,517	1,514	1,517	1,43	

Les différentes colonnes ont été calculées par les formules obtenues par la méthode de Kelvin (colonne K, formules 1), par l'approximation de Mascart (colonne M, formule 7), par la variante de cette approximation (colonne M', formule 8), par la méthode des lignes de force circulaires (colonne C, formule 9), par le développement en série (colonne S, formule 10).

La méthode de Kelvin est rigoureuse ; comparons à la colonne K les autres colonnes :

1° L'approximation de Mascart donne des valeurs un peu trop petites ; la variante, des valeurs un peu trop grandes ; ces valeurs sont d'autant plus exactes que l'écartement est plus grand. C'est bien ce que nous avons prévu. Nous constatons que l'approximation de Mascart est moins exacte que

la variante, tout au moins pour le calcul du champ maximum.

2° La méthode des lignes de force circulaires donne une formule valable dans le cas des petits écartements. Dans ce cas, on obtient des résultats sensiblement aussi exacts en remplaçant la formule précédente par les premiers termes de son développement en série.

3° En résumé, si $d < 0,8 R$, nous appliquerons la formule (10), qui a servi à calculer la colonne S :

$$h = \frac{V}{R} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{3} + \frac{d_1}{90} \right) \quad \text{avec : } d_1 = \frac{d}{R}$$

Si $d > 0,8 R$, nous appliquerons la formule (8), qui a servi à calculer la colonne M' :

$$h = \frac{V}{2R} \left[1 + \frac{c+1}{c-1,2} + \frac{c}{(c^2-c-1)^2} + \frac{1}{(c-2)(l-1)} \right]$$

avec :
$$l = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4}}{2}$$

Dans le cas le plus défavorable ($d = 0,8 R$) l'erreur relative sera encore inférieure à $\frac{1}{150}$. Nous avons calculé le champ maximum en vue d'étudier les conditions de la décharge électrique entre sphères. Les formules précédentes sont certainement plus précises que des mesures de potentiel explosif.

CHAPITRE III

Application à la décharge électrique entre sphères

Les expériences de Franck et Hertz montrent que dans un gaz rare, comme l'hélium, les électrons de faible vitesse rebondissent sur les atomes du gaz d'une façon parfaitement élastique. Ces expériences expliquent que, dans le cas des gaz rares, la décharge électrique soit déterminée par la différence de potentiel entre les électrodes. Malgré les chocs, l'électron peut, dans le champ électrique totaliser l'énergie cinétique nécessaire à l'ionisation des atomes.

Dans l'azote, les chocs des électrons lents sont presque élastiques, mais, dans l'oxygène, les chocs sont complètement mous. Il en résulte que, dans l'air, la décharge électrique ne sera pas déterminée par la différence de potentiel, mais plutôt par la plus grande intensité du champ électrique ⁽¹⁾. Nous étudierons, en partant de ce point de vue, les expériences d'Abraham et Villard, sur la décharge entre sphères, dans l'air à la pression atmosphérique.

Etude des mesures d'Abraham et Villard. — MM. Abraham et Villard ont mesuré le potentiel explosif V en fonction de la distance d des sphères, ou la distance explosive d en fonction du potentiel V , jusqu'à 300.000 volts. Leurs mesu-

(¹) Pendant la rédaction de ce travail, j'ai appris que ce point de vue avait déjà été envisagé par Whitehead (*Electrical Discharges in Gases*, 1927) et Schumann (*Durchbruchfeldstärke von Gasen*, Springer).

res les plus précises se rapportent à des sphères égales, de diamètre D , portées à des potentiels opposés. Les formules du chapitre précédent s'appliquent dans ces cas et permettent de calculer pour quelle valeur h du champ maximum se produit la décharge. Les tableaux ci-joints donnent le potentiel explosif V en kilovolts et le champ maximum explosif h en kilovolts par cm., en fonction de la distance d exprimée en cm. La formule déduite de la méthode des lignes de force circulaires a permis de calculer h jusqu'à la valeur de d indiquée par un astérisque sur chaque tableau. La formule déduite de l'approximation de Mascart a été employée pour les valeurs plus grandes.

L'examen des tableaux conduit aux conclusions suivantes :

1° Pour le moment, faisons abstraction des dernières mesures du tableau I. On trouve que pour deux sphères données, la décharge se produit quand le champ maximum atteint une valeur déterminée. Ce résultat se vérifie à quelques centièmes près. Par exemple, pour les sphères de 10 cm. de diamètre, quand la distance varie de 1 cm. à 36 cm., le potentiel explosif varie de 32 à 300 kilovolts, mais les valeurs du champ maximum explosif restent comprises, irrégulièrement, entre 33,4 et 35,8, la valeur moyenne étant 35 kilovolts par cm.

2° Par contre, le champ explosif varie, quoique lentement, avec le diamètre des sphères, comme le montre le tableau suivant :

D	5	10	30
Valeurs moyennes de h	38	35	31

Extrapolation des mesures. — Considérons les sphères de 5 cm. La valeur moyenne du champ explosif a été calculée en ne tenant pas compte des quatre dernières mesures du tableau I. Cette valeur moyenne est 38 kilovolts par cm.

Il est certain que le champ peut dépasser cette valeur

sans que la décharge se produise. C'est le cas lorsque les deux sphères sont très éloignées et la tension assez élevée. Supposons les deux sphères infiniment éloignées et calculons la tension V pour laquelle le champ à la surface est égal à 38 kilovolts par cm. ; ce champ se calcule comme si chaque sphère était seule dans l'espace :

$$h = \frac{V}{2R} \quad \text{d'où :} \quad V = h \times D = 190 \text{ kilovolts}$$

A priori, on peut donc dire que la constance du champ maximum explosif ne s'applique plus au-dessus de 190 kilovolts.

En fait, le tableau I montre qu'au voisinage de cette tension, le champ explosif cesse d'être constant. L'allure du phénomène change quand la tension appliquée s'approche d'une valeur égale au produit du diamètre par la valeur du champ maximum qui détermine la décharge aux tensions moins élevées. Ce résultat, obtenu par l'examen du tableau I, permet d'extrapoler largement les résultats expérimentaux des autres tableaux.

Supposons des sphères de 30 cm. de diamètre ; la valeur du champ explosif est 31 kilovolts par cm.

Soit par exemple à calculer le potentiel explosif pour une distance égale à 60 cm. :

$$d = 60 \quad R = 15 \quad c = 6 \quad l = 5,828$$

d est plus grand que 0,8 R ; la formule applicable dans ce cas donne pour le champ maximum :

$$h = \frac{V}{D} \times 1,339 \quad \text{d'où :} \quad V = \frac{hD}{1,339}$$

Comme V est sensiblement inférieur à hD , le champ explosif doit être égal à 31 kilovolts par cm. et on trouve, pour le potentiel explosif :

$$V = 695.000 \text{ volts.}$$

TABLEAU I : $D = 5$ cm.

d	V	h	d	V	h
1	32,3	36,7	9	137	37,8
2*	58,6	37,4	10	142,5	38,1
3	80	38,5	11	178	38,7
4	93,5	37,2	12	153	39
5	106	37,4	13,5	160	39,7
6	117,5	38,1	20,2	200	44,4
7	125	37,9	44	240	51
8	131	37,8	53	260	63,1

TABLEAU II : $D = 10$ cm.

d	V	h	d	V	h
1	32	34,2	7	164,5	35,5
2	58,9	33,4	8	180	35,8
3	84,4	33,9	9	192,5	35,7
4*	108,3	34,6	10	202	35,6
5	130,2	34,8	11	211	35,5
6	148	35,3	12	219	35,4
			36	300	35,1

TABLEAU III : $D = 30$ cm.

d	V	h	d	V	h
1	31,7	32,5	7	185,8	30,9
2	58,6	30,5	8	210,4	31,1
3	85,1	30,4	9	233,3	31,2
4	111,3	30,3	10	254,4	31,1
5	136,9	30,5	11	274	31,1
6	162,1	30,7	12*	291	30,9
			12,6	300	31,2

RÉSUMÉ

1° Dans la mesure des constantes diélectriques des liquides en haute fréquence, au pont de Nernst, on est obligé de placer le liquide dans un *condensateur à deux bornes*, donc sans anneau de garde, ce qui restreint la précision des mesures. J'ai imaginé un condensateur spécial, permettant des mesures correctes et représentant, pour les mesures en haute fréquence, le même progrès que le condensateur à anneau de garde pour les mesures statiques.

2° Étant donné sa nature, le nouveau condensateur peut servir, après un étalonnage préalable, de coefficient d'influence étalon. Ceci est avantageux pour l'étalonnage des condensateurs variables du pont de Nernst.

3° J'ai étalonné directement le condensateur haute fréquence, grâce à une nouvelle méthode de mesure absolue des coefficients d'influence. On sait les précautions que demande généralement une mesure de ce genre et il est intéressant de posséder une méthode d'application facile, donnant le millièrne.

4° La nouvelle méthode repose sur l'emploi d'un condensateur variable, du type condensateur plan à anneau de garde. La méthode est précise, malgré le parallélisme imparfait des plateaux et, pour expliquer les résultats obtenus, j'ai dû établir la théorie du *coin électrostatique*.

5° La mise en œuvre de la méthode nécessite un électromètre, employé en circuit ouvert. Il n'est pas toujours facile, dans ce cas, de se rendre maître de l'électromètre. Il est indispensable de bien connaître l'appareil utilisé et l'étude

de celui-ci m'a donné l'occasion de simplifier la mesure des principales constantes d'un électromètre.

6° Les mesures en circuit ouvert sont gênées par un déplacement spontané du spot. J'ai étudié ce phénomène parasite et j'ai indiqué comment on peut s'en débarrasser. L'élimination du mouvement spontané m'a permis d'étalonner le condensateur haute fréquence, par la méthode absolue précédente, dans d'excellentes conditions.

7° Étudiant les difficultés de l'emploi d'un électromètre en circuit ouvert, j'ai trouvé utile d'indiquer les précautions qu'il faut prendre dans le cas important et délicat où l'on mesure des charges électriques en présence d'une installation à rayons X.

8° L'étude du coin électrostatique m'a conduit à une méthode d'approximation qui consiste à remplacer des lignes de force presque rectilignes par des lignes de force circulaires. L'application de cette méthode d'approximation au calcul de la valeur maximum du champ électrique, dans le cas de deux conducteurs sphériques qui s'influencent, a été l'origine de la seconde partie de ce travail.

9° J'ai effectué le calcul du champ maximum en vue d'étudier les conditions de la décharge électrique entre sphères. Ce calcul m'a permis de dégager des résultats nouveaux de l'étude des expériences d'Abraham et Villard sur la décharge entre sphères égales à la pression atmosphérique.

10° Voulant me rendre compte de la précision obtenue par l'approximation des lignes de force circulaires, j'ai calculé également le champ maximum en faisant appel aux procédés employés par Lord Kelvin pour le calcul des coefficients d'influence des deux sphères. Étudiant les méthodes de Lord Kelvin, j'ai montré dans quelle mesure le cas de deux sphères inégales peut se ramener au cas de deux sphères égales.

11° J'ai montré aussi comment, dans le cas de l'influence entre une sphère et un plan, on peut se servir des tables

numériques établies par Lord Kelvin pour le cas de deux sphères égales.

Je tiens à dire combien j'ai été heureux de poursuivre ces recherches au Collège de France, au laboratoire de M. Langevin, auquel j'exprime ici toute ma reconnaissance.

Je tiens à dire aussi quel souvenir je garde de l'atmosphère de camaraderie sincère dans laquelle j'ai travaillé.

Enfin, j'ai bénéficié de subventions de la Caisse des Recherches scientifiques, à laquelle j'exprime mes vifs remerciements.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

L'écoulement des gaz ultra raréfiés

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 28 janvier 1930.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

CH. MAURAIN.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

S. CHARLÉTY.

LAVAL. — IMPRIMERIE BARNÉOUD.

